

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)**

Ю.В. КУЗНЕЦОВ, А.Б. БАЕВ

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ И ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ ИМПУЛЬСНЫХ И
ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Учебное пособие

Утверждено

на заседании редсовета

14 сентября 2006 г.

Москва

Издательство МАИ

2007

Кузнецов Ю.В., Баев А.Б. Спектральный и временной анализ импульсных и периодических сигналов: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 95 с.: ил.

Даются основные теоретические соотношения и методика анализа временных и частотных характеристик аналоговых детерминированных импульсных и периодических сигналов. На примерах конкретных сигналов показана процедура определения и построения спектров сигналов, автокорреляционной функции, энергетического спектра или спектра мощности. Проведён анализ прохождения детерминированных аналоговых сигналов через линейные цепи, заданные своей импульсной или частотной характеристикой. Книга предназначена для студентов радиотехнических специальностей, изучающих дисциплину «Радиотехнические цепи и сигналы».

Рецензенты: кафедра физики твердого тела Саратовского государственного университета (зав. кафедрой, проф., д-р физ.-мат. наук Д.А. Усанов), Генеральный директор ФГУП «НПП «Гамма» А.А. Сергеев.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Импульсные аналоговые сигналы

- $s(t)$ – аналоговый импульсный сигнал, В;
 $S(f)$ – спектр аналогового импульсного сигнала, В·с;
 $R_s(t)$ – автокорреляционная функция аналогового импульсного сигнала, В²·с;
 $W_s(f)$ – энергетический спектр аналогового импульсного сигнала, В²·с²;

Периодические аналоговые сигналы

- $s_T(t)$ – аналоговый периодический сигнал, В;
 $S_T(f)$ – спектр аналогового периодического сигнала, В·с;
 $C[m]$ – отсчёты спектра аналогового периодического сигнала, В;
 $R_T(t)$ – АКФ аналогового периодического сигнала, В²;
 $P_T(f)$ – спектр мощности аналогового периодического сигнала, В²·с;
 $P[m]$ – отсчёты спектра мощности аналогового периодического сигнала, В².

Характеристики аналогового фильтра

- $h(t)$ – импульсная характеристика (ИХ) аналогового фильтра, Гц;
 $H(f)$ – частотная характеристика (ЧХ) аналогового фильтра, б/р;
 $R_h(t)$ – АКФ импульсной характеристики аналогового фильтра, Гц;
 $G(f)$ – ЧХ аналогового фильтра по энергии, б/р;
 $h_T(t)$ – периодическая импульсная характеристика аналогового фильтра, Гц;
 $H_T(f)$ – дискретная частотная характеристика аналогового фильтра, б/р;
 $H[m]$ – отсчёты дискретной ЧХ аналогового фильтра, Гц;
 $R_{h_T}(t)$ – АКФ периодической ИХ аналогового фильтра, Гц;
 $K_T(f)$ – дискретная ЧХ аналогового фильтра по мощности, б/р;
 $K[m]$ – отсчёты дискретной ЧХ аналогового фильтра по мощности, Гц.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено студентам радиотехнических специальностей и содержит теоретический материал и примеры решения задач по анализу временных и частотных характеристик сигналов и линейных систем в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы». Изложение материала ведётся преимущественно на конкретных примерах. В начале каждого раздела даются основные выражения и определения терминов, используемых при решении задач. В пособии представлены также приложения, содержащие наиболее распространённые на практике пары преобразований Фурье и таблицу основных свойств спектров.

Преобразования Фурье и Лапласа относятся к линейным преобразованиям, широко используемым для описания линейных систем. Правильное использование этих преобразований позволяет существенно упростить процесс решения задач, связанных с линейными системами. Поэтому очень важно понимать и уметь пользоваться методами преобразований. Предварительное рассмотрение общих свойств линейных преобразований на примере преобразования Фурье позволит впоследствии сосредоточиться на важных отличительных особенностях преобразования Лапласа, связанных с областью сходимости в комплексной плоскости. Глубокое понимание преобразования Фурье облегчает изучение особенностей других линейных преобразований.

При анализе линейных систем удобно пользоваться импульсной характеристикой, представляющей собой реакцию системы на воздействие в виде единичного импульса, описываемого дельта-функцией с единичной площадью (весом). Для нахождения реакции каузальных линейных систем на одностороннее воздействие, заданное для $t > 0$, можно воспользоваться и односторонним преобразованием Лапласа. Каузальная система характеризуется тем, что реакция на её выходе не может возникнуть раньше начала воздействия на её входе.

В учебной литературе отмечаются преимущества преобразования Лапласа для определения переходных процессов и решения ряда задач анализа линейных систем по сравнению с преобразованием Фурье. Главным преимуществом преобразования Фурье является возможность его физической интерпретации в виде спектра, дифракционной картины и т.п.

Преобразование Лапласа не имеет удобной физической интерпретации, поэтому после взятия преобразования Лапласа от какого-либо соотношения, остаётся только математический, а не физический смысл этих преобразований.

Преобразование Фурье широко используется в теории и практике многих научных дисциплин. Несмотря на то, что преобразование Фурье наряду с другими преобразованиями можно рассматривать как чисто математический функционал, во многих отраслях науки оно проявляет такой же глубокий физический смысл, как и функции, подвергающиеся этому преобразованию. Форма волны, колебания или сигнала в оптике, электротехнике и акустике является такой же физической измеряемой величиной, как и их спектр: осциллограф позволяет нам увидеть форму электрического колебания, тогда как спектроскоп или анализатор спектра позволяет визуализировать оптический или электрический спектры. Физическая интерпретация акустического спектра ещё более ясная, поскольку человеческое ухо воспринимает звук через его спектр. Форма колебания связана со спектром преобразованием Фурье, именно поэтому преобразование Фурье по существу описывает физические соотношения между временными и спектральными характеристиками одного и того же процесса. В большинстве учебников по радиотехнике преобразование Фурье вводится как частный случай (предельный переход) ряда Фурье. На самом деле преобразование Фурье можно и нужно рассматривать как более общее преобразование, чем ряд Фурье, поскольку ряды Фурье вытекают из преобразования Фурье как частный случай для специфических форм колебаний, обладающих свойством периодичности во времени. К тому же строго периодические колебания сами по себе являются предельным переходом от реальных сигналов конечной длительности к их периодическому повторению, описывающему строго периодический сигнал. Такие формы преобразования Фурье, как дискретное по времени преобразование Фурье, используемое для спектрального представления дискретных равноотстоящих отсчётов аналогового (непрерывного во времени) колебания также вытекает из общего преобразования Фурье.

При изучении преобразования Фурье, тождественно эквивалентного понятию спектра, главный упор делается не на технику математического нахождения интегральных функционалов, а на использование известных пар

сигналов и спектров, а также свойств преобразования Фурье, сформулированных и доказанных математиками в соответствующих теоремах. К этим свойствам относятся свойства линейности, масштабирования, умножения, свёртки, дифференцирования, интегрирования и т.д. Физический смысл всех этих свойств спектров чрезвычайно важен и должен найти своё отражение в учебниках по радиотехническим цепям и сигналам.

Другая важная особенность данного учебного пособия состоит в широком использовании дельта-функции как для анализа сигналов (формирование пачек импульсов, периодических колебаний, дискретных сигналов и т.д.), так и для анализа линейных систем. Теоретическое и физическое описание обобщённых функций (дельта-функция, дуплет, триплет и т.д.) также должно даваться в соответствующих разделах учебников. В учебном пособии даются основные свойства дельта-функций и примеры по их использованию при анализе сигналов и цепей.

Спектральный и временной анализ сигналов на основе свойств преобразования Фурье требует глубокого понимания и умения пользования операцией свёртки. В пособии приводятся несколько примеров с поясняющими рисунками, рассмотрена методика использования операции свёртки при нахождении корреляционных (энергетических) характеристик сигналов, а также анализ прохождения сигналов через линейные системы во временной области. Определение автокорреляционных функций и энергетических спектров сигналов на входе и выходе линейной системы во многих случаях позволяет упростить задачу анализа линейных систем. Такой подход на практике используется в тех случаях, когда фазовые соотношения между отдельными компонентами спектра не имеют решающего значения, а важно обеспечить только нужные соотношения между амплитудными компонентами спектра сигнала.

Терминология, используемая в данном пособии, несколько отличается от общепринятой терминологии в официальной программе курса «Радиотехнические цепи и сигналы». Это связано с изменением акцентов при проведении временного и спектрального анализа, необходимость введения которых обоснована ранее. Так, термин спектральная плотность непериодического сигнала заменён более коротким и общим термином спектр или частотная (спектральная) функция сигнала. Причём понятие

спектра вводится как для импульсных (непериодических), так и для строго периодических сигналов, а в последствии будет использоваться и для сигналов дискретного времени. Для подчёркивания комплексного характера спектральной функции вводится понятие амплитудного спектра (АС) и фазового спектра (ФС), либо при квадратурном представлении спектра действительная и мнимая составляющие спектральной функции. Аналогичные характеристики вводятся и для описания линейных систем в частотной области: амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) и фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

Спектр периодического колебания представляет собой сумму дельта-функций по частоте, веса (площади) которых являются соответствующими коэффициентами комплексного ряда Фурье. Положение дельта-функций на оси частот указывает на значение частот гармоник колебания. Более наглядно отображать спектр площадями этих дельта-функций, располагая их на частотах гармоник, образующих периодический сигнал. При этом мы приходим к традиционному отображению спектра периодического сигнала в виде совокупности амплитуд и фаз соответствующих гармоник. Спектр каждой гармоники отображается в виде двух графиков, на одном из которых показывается амплитуда, а на другом, – начальная фаза (аргумент) гармоники. Используется также и квадратурное отображение спектра гармоник, когда на одном из графиков отображаются действительные части соответствующих коэффициентов ряда Фурье, а на другом – мнимые составляющие коэффициентов. Введённая терминология позволяет подчеркнуть разницу между спектром периодического сигнала и его графическим изображением в виде совокупности гармоник.

Авторы пособия выражают глубокую признательность проф. И.С. Рыжаку, проф. В.В. Латышеву и проф. М.П. Дёмину за полезные замечания, высказанные при подготовке к изданию данного учебного пособия, а также сотрудникам кафедры теоретической радиотехники МАИ, принявшим участие в его обсуждении.

1. ВВЕДЕНИЕ

В любой радиотехнической или электронной системе приходится иметь дело с *сигналами*, служащими для переноса информации между отдельными устройствами системы. Такие сигналы можно назвать информационными сигналами. В этих же системах всегда присутствуют сигналы, искажающие передаваемую информацию. Это могут быть сигналы других систем, накладывающиеся на информационные сигналы, либо шумовые сигналы, обусловленные физическими процессами в элементах самой системы. Примером таких шумовых сигналов может быть тепловой шум. В целом, как полезные информационные, так искажающие сигналы, относятся к категории *случайных сигналов*, значения которых в каждый конкретный момент времени можно определить лишь с некоторой вероятностью.

При разработке, отладке и тестировании радиотехнических систем необходимо задавать полностью известные сигналы с тем, чтобы по результатам измерения сигналов, прошедших через устройства системы, можно было судить о правильности функционирования того или иного устройства или системы в целом. Это можно сделать, сравнивая измеренные сигналы с желаемыми или ожидаемыми сигналами. Кроме того, разработка любого электронного устройства включает в себя процесс *анализа* прохождения сигналов через это устройство. Анализ проводится с помощью *моделей* сигналов и устройств, описываемых некоторыми математическими функциями. Модели можно строить как в *аналитическом* виде, т.е. в виде формул и соотношений, так и в виде *компьютерных моделей*. Практика показывает, что наилучший результат анализа устройств дает разумное сочетание аналитического и компьютерного моделирования, поскольку предварительный аналитический анализ позволяет существенно упростить компьютерную модель и тем самым ускорить процесс моделирования и разработки радиотехнической или электронной системы.

Сигналы, используемые при моделировании, отладке и тестировании систем, относятся к классу *детерминированных* сигналов. Детерминированным называется сигнал, который можно полностью описать

аналитической функцией, зависящей от времени или частоты. Детерминированные сигналы используются для описания реальных сигналов, действующих в радиотехнических или электронных системах.

Детерминированные сигналы можно разделить на две группы: *импульсные* и *периодические* сигналы. Сигналы, обладающие конечной энергией, называются импульсными сигналами. При этом импульсные сигналы могут описываться как ограниченной на заданном интервале времени функцией, так и бесконечной функцией. Периодические сигналы могут быть получены путем суммирования бесконечного числа импульсных сигналов, отстоящих друг от друга на одинаковый интервал времени, называемый периодом сигнала. Периодические сигналы обладают бесконечной энергией, поэтому для их характеристики пользуются средней мощностью сигнала за период.

Детерминированные сигналы могут быть заданы в виде функции непрерывного аргумента времени (*аналоговые сигналы*). Если же сигнал задан только в дискретные моменты времени своими отсчётами, то такой сигнал называется *дискретным сигналом*. Сигнал может быть дискретным по своей природе, либо быть получен из аналогового сигнала путем его дискретизации во времени.

Таким образом, детерминированные сигналы в общем случае могут быть отнесены к одному из четырех типов сигналов, каждому из которых свойственно использование специфического математического аппарата для его описания:

- *аналоговые импульсные сигналы*, спектр которых определяется с помощью преобразования Фурье, а прохождение сигналов через линейную цепь во временной области описывается операцией свёртки;

- *аналоговые периодические сигналы*, спектр которых определяется с помощью ряда Фурье, а прохождение сигналов через линейную цепь во временной области описывается операцией циклической свёртки;

- *дискретные импульсные сигналы*, спектр которых определяется с помощью дискретного по времени преобразования Фурье, а прохождение сигналов через систему дискретного времени описывается операцией дискретной свёртки;

- *дискретные периодические сигналы*, спектр которых определяется с помощью дискретного преобразования Фурье, а прохождение сигналов через

систему дискретного времени описывается операцией дискретной циклической свёртки.

Анализ сигналов в радиотехнических или электронных системах заключается в определении временных и частотных характеристик этих сигналов. К ним относятся временная функция сигнала, автокорреляционная функция сигнала, спектральная плотность или спектр сигнала, энергетический спектр или спектр мощности сигнала. По этим характеристикам можно определить параметры сигналов, главными из которых являются длительность, период повторения, интервал корреляции, скорость нарастания и спада вершины импульса (временные параметры);

- ширина спектра, особые точки (максимумы и минимумы) спектра, уровень боковых лепестков спектра, значения частот гармонических составляющих и другие частотные параметры;
- энергия сигнала, средняя мощность сигнала (энергетические и мощностные параметры).

Зная численные значения параметров сигналов можно проводить их сравнение между собой, а также оценивать их изменение при прохождении через радиотехническую или электронную систему.

В данном учебном пособии рассматриваются вопросы анализа аналоговых импульсных и периодических сигналов, способы нахождения их временных и частотных характеристик. Рассмотрен анализ прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи и сравнение параметров и характеристик этих сигналов на входе и выходе цепи. При изложении материала сначала даются подробные общие теоретические сведения, которые впоследствии разбираются на большом числе примеров решения задач. Главным принципом спектрального анализа сигналов, проводимым в данном учебном пособии, является нахождение спектров на основании таблицы известных пар преобразований Фурье без прямого интегрирования временных или частотных функций сигнала. При этом основное внимание уделяется широкому использованию теорем о свойствах преобразований Фурье, таких как линейность, произведение, свёртка, дуальность частоты и времени и т.д.

В современной теории сигналов широко используются δ -функции, относящиеся к классу обобщённых функций. Использование этих функций при моделировании временных и частотных характеристик сигналов

позволяет применять интеграл Фурье к сигналам с бесконечной энергией, в том числе и к периодическим сигналам. Это делает преобразование Фурье универсальным инструментом анализа практически любых видов сигналов, используемых в радиотехнических системах. Применение δ -функций для моделирования сдвига сигналов по времени, а спектров по частоте, упрощает процесс нахождения характеристик сигналов и делает его более наглядным.

Другой важной особенностью данного учебного пособия является широкое использование при анализе сигналов и их спектров операции свёртки. При этом δ -функция, обладающая свойством воспроизведения формы обычной функции при свёртке, является очень удобным средством для упрощения процедуры определения результата свёртки.

В целом материал, приведённый в данном учебном пособии, предназначен для развития навыков анализа сигналов и определения их параметров во временной и частотной области с применением как аналитических, так и компьютерных методов моделирования.

2. АНАЛОГОВЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СИГНАЛЫ

Рассмотрим основные временные и частотные параметры и характеристики аналоговых импульсных сигналов. Как было упомянуто выше, импульсные сигналы в общем случае могут быть заданы своими моделями на конечном интервале времени $[t_1, t_2]$, полубесконечном интервале: $(-\infty, t_0]$, $[t_0, \infty)$. Примерами бесконечных сигналов, ограниченных по времени, являются прямоугольный импульс, треугольный импульс и другие, а также любой сигнал, умноженный на функцию, ограниченную во времени на некотором интервале $[t_1, t_2]$:

$$s_1(t) = \begin{cases} s(t), & t \in [t_1, t_2], \\ 0, & t \notin [t_1, t_2], \end{cases} \quad (2.1)$$

где $s(t)$ – сигнал, определённый на более широком временном интервале, чем функция $s_1(t)$.

Примерами сигналов, определённых на бесконечных или полубесконечных интервалах, являются экспоненциальные функции, импульсы гауссовской формы (см. прил. 1), а также сигналы, образованные из указанных сигналов с помощью линейных операций: суммирование, взвешивание (умножение на амплитудный коэффициент), задержка и др.

В частотной области аналоговые импульсные сигналы можно описать с помощью спектральной функции (спектра) $S(f)$, которая связана с временной функцией сигнала $s(t)$ преобразованием Фурье. Прямое преобразование Фурье имеет вид:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt, \text{ В.с.} \quad (2.2)$$

Рассмотрим основные свойства временного и спектрального описания детерминированных аналоговых импульсных сигналов $s(t)$. Спектр таких сигналов $S(f)$ в общем случае является комплексной функцией частоты, которая обладает комплексно-сопряжённой симметрией для сигналов $s(t)$, описываемых действительными функциями:

$$S(f) = S^*(-f), \quad (2.3)$$

где «*» означает комплексное сопряжение, т.е. смену знака перед мнимыми составляющими комплексной функции $S(f)$.

Любую комплексную функцию $S(f)$ можно представить в *показательной форме* через модуль и аргумент:

$$S(f) = |S(f)| \cdot e^{j \arg S(f)}, \quad (2.4)$$

либо в *квадратурной форме* через действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} S(f) &= \operatorname{Re}\{S(f)\} + j \operatorname{Im}\{S(f)\} = \\ &= |S(f)| \cos[\arg S(f)] + j \cdot |S(f)| \sin[\arg S(f)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Модуль спектральной функции $S(f)$, называемый *амплитудным спектром* (АС), представляет собой действительную функцию, обладающую свойством чётной симметрии:

$$\text{АС} \Rightarrow |S(f)| = |S(-f)|. \quad (2.6)$$

Аргумент спектральной функции $S(f)$, называемый *фазовым спектром* (ФС), обладает свойством нечётной симметрии:

$$\text{ФС} \Rightarrow \arg S(f) = -\arg S(-f). \quad (2.7)$$

Аналогичными свойствами обладают действительная и мнимая части спектральной функции:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{S(f)\} &= \operatorname{Re}\{S(-f)\}, \\ \operatorname{Im}\{S(f)\} &= -\operatorname{Im}\{S(-f)\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Показательная и квадратурная формы спектральной функции сигнала связаны между собой следующими соотношениями:

$$\text{АС} \Rightarrow |S(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{S(f)\} + \operatorname{Im}^2\{S(f)\}}, \quad (2.9)$$

$$\text{ФС} \Rightarrow \arg S(f) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{S(f)\}}{\operatorname{Re}\{S(f)\}}, & \operatorname{Re}\{S(f)\} > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{S(f)\}}{\operatorname{Re}\{S(f)\}} + \pi, & \operatorname{Re}\{S(f)\} < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

При отображении спектров сигналов удобно пользоваться следующими рекомендациями. Во-первых, спектр действительных сигналов всегда изображается в виде пары графиков (АС и ФС, либо действительная и мнимая части спектра), представляемых в одинаковом масштабе по оси частот. Во-вторых, при изображении спектров можно использовать только положительные частоты. В-третьих, ФС строится в пределах $[-\pi, \pi]$ по

вертикальной оси, поскольку добавление целого числа 2π к аргументу комплексной функции не изменяет её значения.

Таким образом, основными характеристиками аналогового импульсного сигнала являются временная $s(t)$ и спектральная $S(f)$ функции сигнала, связанные между собой преобразованием Фурье:

$$s(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} S(f). \quad (2.11)$$

Для сравнения сигналов друг с другом используются *параметры* сигналов и спектров. Основными параметрами аналогового импульсного сигнала является его *длительность* τ и *ширина спектра* F . Они характеризуют размеры интервалов времени и частоты, в пределах которых сосредоточена основная часть *энергии сигнала*. Геометрический смысл энергии сигнала заключается в величине площади под квадратом временной функции сигнала

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt, \text{ В}^2 \cdot \text{с}. \quad (2.12)$$

В соответствии с теоремой Парсеваля для аналоговых импульсных сигналов их энергию можно также определить по амплитудно-частотному спектру:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (2.13)$$

В том случае, когда сигнал имеет конечную длительность, ограниченную временным интервалом $[t_1, t_2]$ (2.1), т.е. длительность сигнала равна $\tau = t_2 - t_1$, его спектральная функция $S(f)$ не ограничена на оси частот, поэтому ширину спектра F сигнала $s(t)$ нужно выбирать, исходя из выбранного критерия. Введём понятие *эффективной ширины спектра* как интервала частот, в котором сосредоточена заданная доля общей энергии сигнала.

Если в спектре сигнала не наблюдается ярко выраженного максимума на некоторой частоте f_0 или этот максимум находится вблизи начала координат, то за начало интервала частот, определяющего эффективную ширину спектра, принимают нулевую частоту. Такие аналоговые сигналы относятся к так называемым *видеосигналам*. Другим характерным свойством видеосигналов является отсутствие гармонического «заполнения» сигнала, наблюдаемого у модулированных радиосигналов.

Если задаться долей энергии в пределах ширины спектра

$$M = \frac{E_M}{E_s} \cdot 100\%, \quad (2.14)$$

то эффективную ширину спектра F_M можно косвенно определить из соотношения:

$$E_M(F_M) = 2 \cdot \int_0^{F_M} |S(f)|^2 df. \quad (2.15)$$

При определении эффективной ширины спектра удобно пользоваться графиком зависимости части энергии сигнала в полосе F_M от ширины интервала частот $[0, F_M]$. На рис. 2.1. показан пример такой зависимости.

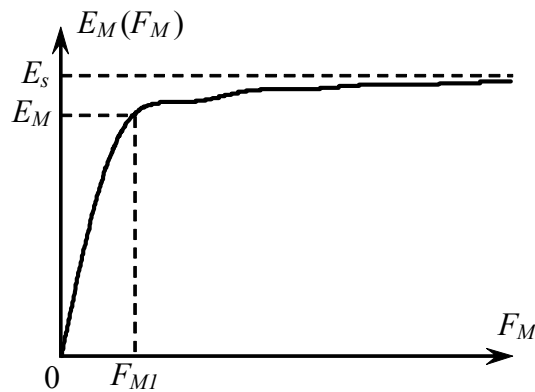


Рис. 2.1. Зависимость части энергии сигнала от ширины интервала частот

Во временной области импульсный видеосигнал характеризуется эффективной длительностью τ_M , которая определяется как длительность интервала времени, в котором сосредоточена заданная часть общей энергии сигнала. Если расположить начало координат в точке, обеспечивающей чётную или нечётную симметрию временной функции сигнала $s(t)$, эффективная длительность сигнала τ_M косвенно находится из выражения

$$E_M(\tau_M) = 2 \cdot \int_0^{\tau_M} s^2(t) dt. \quad (2.16)$$

Если видеосигнал не обладает симметрией во времени, но обладает началом или концом (сигнал задан на полубесконечном интервале), то точку начала сигнала можно выбрать в качестве начала координат и соотношение (2.16) преобразуется к следующему виду:

$$E_M(\tau_M) = \int_0^{\tau_M} s^2(t) dt. \quad (2.17)$$

Когда сигнал не обладает ни одним из указанных свойств, интервал τ_M находится как разность моментов времени t_{2M} и t_{1M} , между которыми сосредоточена заданная часть M энергии сигнала

$$E_M(t_{1M}, t_{2M}) = \int_{t_{1M}}^{t_{2M}} s^2(t) dt. \quad (2.18)$$

При этом моменты времени t_{2M} и t_{1M} выбираются так, чтобы $|s(t_{1M})| = |s(t_{2M})|$.

Обратное преобразование Фурье позволяет найти сигнал по его спектру:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df, \text{ В.} \quad (2.19)$$

Восстановление сигнала $s(t)$ по известному спектру $S(f)$ в ограниченной полосе частот F_M даёт аппроксимацию сигнала $\hat{s}(t)$:

$$\hat{s}(t) = \int_{-F_M}^{F_M} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df. \quad (2.20)$$

Отличие аппроксимации сигнала $\hat{s}(t)$ от исходного сигнала $s(t)$ можно оценить по величине энергии разности сигналов:

$$E_{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt, \quad (2.21)$$

используемой в качестве меры точности восстановления сигнала.

Эффективная ширина спектра F_{M1} и эффективная длительность τ_{M1} сигнала определяют интервалы по частоте и времени, в которых сосредоточена информация о форме сигнала и его спектра. Чем ближе параметр M к 100%, тем точнее сохраняется форма сигнала и его спектра при переходе из частотной области во временную область и обратно с помощью интеграла Фурье с ограниченными пределами.

Во многих системах радиосвязи и радиолокации основные требования предъявляются не столько к форме сигнала, сколько к возможности обнаружить наличие сигнала на фоне других сигналов и шумов. Это позволяет пользоваться более простыми определениями длительности импульса и ширины спектра. Сигналы, обладающие конечной энергией, имеют спадающий характер временной функции и модуля спектральной функции. Задавшись некоторым уровнем относительно максимума функции, можно непосредственно по графику определить точки пересечения этой

функции с заданным уровнем. Абсциссы этих точек (координаты горизонтальных осей времени или частоты) позволяют определить искомые параметры функций. В качестве таких уровней можно использовать 0,707 от максимума, 0,5 от максимума, 0,1 от максимума и т.д.

Помимо ширины спектра и длительности важным параметром сигнала является уровень амплитудного спектра за пределами выбранной полосы частот, определяющей ширину спектра. Амплитудные спектры импульсных сигналов конечной длительности имеют характерный вид затухающих колеблющихся функций с главным лепестком, в котором сосредоточена основная часть энергии сигнала, и постепенно затухающими боковыми лепестками, в которых распределена внеполосная энергия сигнала. Примером может служить импульсный сигнал и его амплитудный спектр, изображённые на рис. 2.2, а и рис. 2.2, б соответственно.

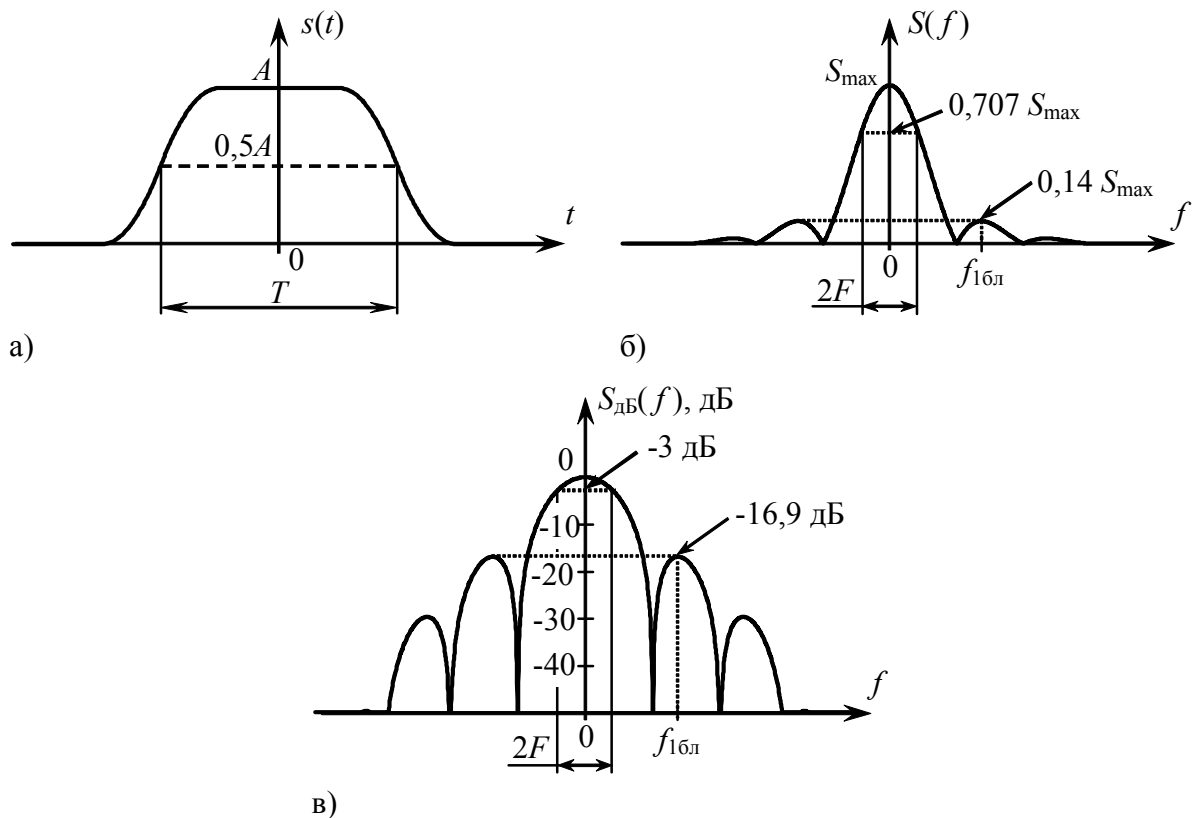


Рис. 2.2. Импульсный сигнал и его амплитудный спектр:

а – сигнал; б – спектр в линейном масштабе; в – логарифмическом масштабе

Импульсный сигнал имеет сложную форму, а его длительность T определена по уровню 0,5 относительно амплитудного значения A . Ширина спектра F выбрана по уровню 0,707 относительно максимального значения S_{\max} . При этом уровень первого, самого высокого бокового лепестка $AС$,

расположенного на частоте $f_{1\text{бл}}$, составляет $0,14 \cdot S_{\text{max}}$. Именно этот уровень принято считать параметром, определяющим внеполосные свойства данного импульсного сигнала.

На практике принято задавать уровень боковых лепестков амплитудного спектра сигнала в децибелах относительно максимального значения АС:

$$S_{\text{дБ}}(f) = 20 \cdot \lg\left(\frac{S(f)}{S_{\text{max}}}\right). \quad (2.22)$$

Амплитудно-частотный спектр импульсного сигнала в логарифмическом масштабе представлен на рис. 2.2, в. Следует отметить, что уровню 0,707 от максимума соответствует уровень -3 дБ в логарифмическом масштабе, а уровень первого бокового лепестка составляет -16,9 дБ.

Помимо временной и спектральной функций в качестве характеристик детерминированных импульсных сигналов используют также автокорреляционную функцию $R_s(t)$ и энергетический спектр $W_s(f)$.

Автокорреляционная функция (АКФ) импульсного сигнала $s(t)$ определяется соотношениями

$$R_s(t) = s(t) * s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(\tau + t) d\tau, \text{ В}^2 \cdot \text{с}, \quad (2.23)$$

где «*» означает операцию линейной свёртки.

Следует обратить внимание на то, что одна из сворачиваемых функций инвертирована во времени. В общем случае линейная свёртка двух сигналов определяется следующим образом:

$$y(t) = x(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot s(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau. \quad (2.24)$$

АКФ является чётной действительной функцией с максимумом в начале координат. Максимальное значение АКФ совпадает со значением энергии сигнала:

$$R_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(\tau) d\tau = E_s. \quad (2.25)$$

Энергетический спектр импульсного сигнала $s(t)$ определяется следующим образом:

$$W_s(f) = S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2 = \text{Re}^2\{S(f)\} + \text{Im}^2\{S(f)\}, \text{ В}^2 \cdot \text{с}. \quad (2.26)$$

Важно отметить, что в энергетическом спектре отсутствует информация о фазовом спектре сигнала, поэтому по энергетическому спектру нельзя восстановить спектральную $S(f)$ или временную $s(t)$ функции сигнала. Энергетический спектр является действительной функцией и обладает чётной симметрией, поэтому его можно изобразить в виде одного графика в области положительных частот.

Автокорреляционная функция $R_s(t)$ и энергетический спектр $W_s(f)$ сигнала $s(t)$ связаны друг с другом преобразованием Фурье:

$$R_s(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} W_s(f), \quad (2.27)$$

поэтому с точки зрения отображения свойств исходного сигнала $s(t)$ они эквивалентны. Исходя из свойства площади преобразования Фурье (см. прил. 2)

$$R_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) df = E_s. \quad (2.28)$$

По энергетическому спектру $W_s(f)$ детерминированного импульсного сигнала можно определить ширину его спектра F . Она определяется по заданному уровню относительно максимального значения. Для энергетического спектра в качестве такого уровня обычно выбирают 0,5 от максимального значения, что соответствует уровню 0,707 от максимального значения в амплитудном спектре.

Взаимосвязь спектральных и временных характеристик детерминированных импульсных аналоговых сигналов можно условно отобразить в виде диаграммы, представленной на рис. 2.3.

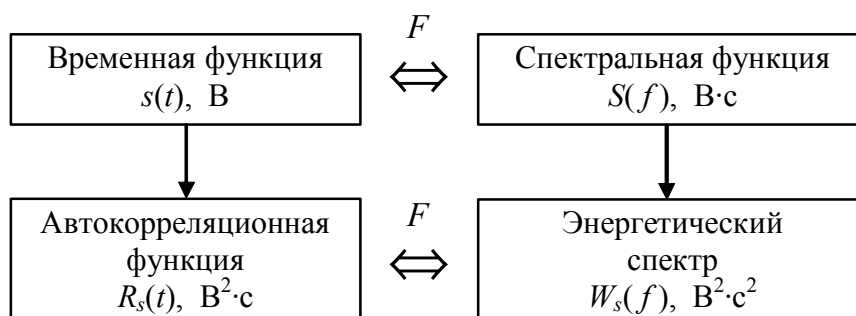


Рис. 2.3. Взаимосвязь характеристик импульсного аналогового сигнала

На рис. 2.3 двухсторонние стрелки обозначают пары преобразований Фурье, односторонние сплошные стрелки обозначают, какая из

характеристик сигнала является определяющей, а какая является определяемой.

Пример 2.1

Рассмотрим процедуру отыскания спектра аналогового экспоненциального импульсного сигнала, который задается выражением

$$s(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t), \quad (2.29)$$

где $u(t)$ – единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда):

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

График функции сигнала $s(t)$ при выбранных значениях параметров $A = 3$ В и $\alpha = 3,14$ 1/мкс показан на рис. 2.4.

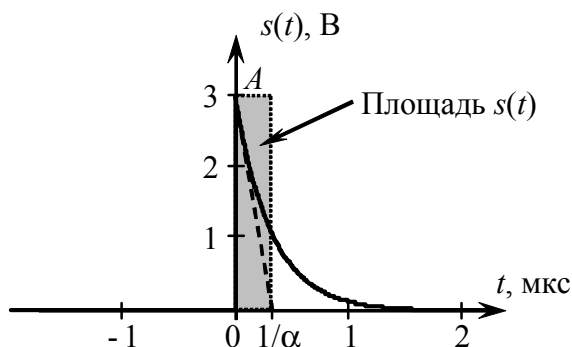


Рис. 2.4. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$

Спектр сигнала $s(t)$ может быть найден путём подстановки выражения сигнала (2.29) в формулу прямого преобразования Фурье (2.2):

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt = \\ &= \frac{A}{-(\alpha + j2\pi f)} \cdot e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Действительная и мнимая части спектра сигнала $s(t)$ показаны на рис. 2.5, а АС и ФС – на рис. 2.6.

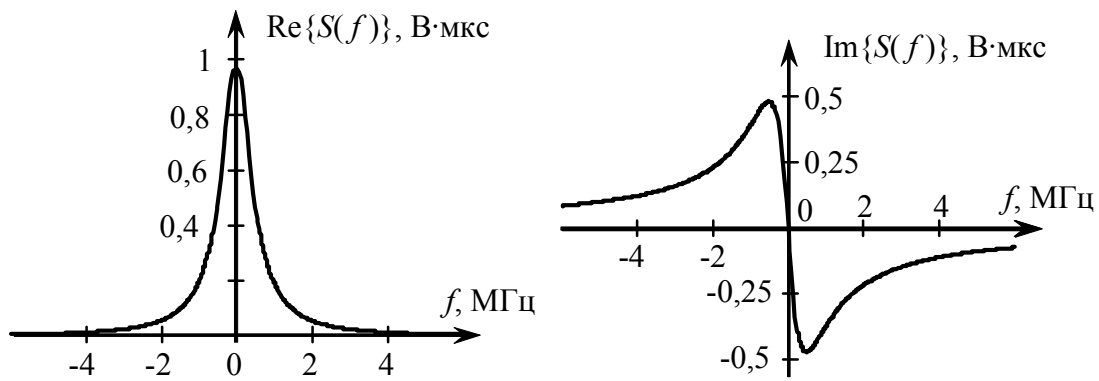


Рис. 2.5. Действительная и мнимая части спектра сигнала $s(t)$

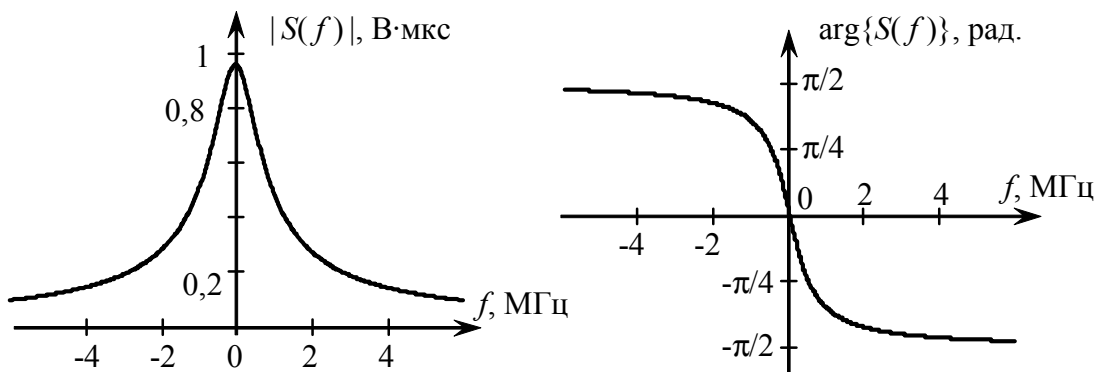


Рис. 2.6. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)$

Из графиков видно, что действительная часть спектра и амплитудно-частотный спектр являются чётными функциями, а мнимая часть спектра и фазо-частотный спектр – нечётными функциями, что подтверждает свойства симметрии спектров действительных сигналов (2.3), (2.6) – (2.8).

Проверить правильность нахождения спектра сигнала можно с помощью свойства площади преобразования Фурье (свойство 17, прил. 2):

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt. \quad (2.32)$$

Площадь под экспоненциальной функцией может быть найдена как произведение $A \cdot (1/\alpha)$. Таким образом, для сигнала $s(t)$ получаем

$$S(0) = A/\alpha \approx 0,96 \text{ В} \cdot \mu\text{с}, \quad (2.33)$$

что совпадает со значением амплитудного спектра сигнала в нуле.

На практике отыскание спектров импульсных сигналов непосредственно с помощью прямого преобразования Фурье (2.2) часто приводит к значительным вычислительным трудностям. Для нахождения спектров удобнее воспользоваться известными спектрами сигналов простой

формы и свойствами преобразования Фурье, представленными в приложениях 1 и 2 соответственно.

В общем случае последовательность действий при нахождении спектров сигналов с использованием теорем о свойствах преобразования Фурье следующая:

- выбрать из таблицы типовых сигналов (прил. 1) сигналы, с помощью которых можно сформировать заданный сигнал;
- записать заданный сигнал с помощью математических операций над выбранными типовыми сигналами;
- найти аналитическое выражение спектра заданного сигнала с использованием известных спектров типовых сигналов и теорем о свойствах спектров;
- выполнить проверку правильности нахождения спектра заданного сигнала с помощью свойств площади функций $s(t)$ и $S(f)$, свойств симметрии сигнала и спектра, либо вычислением спектра заданного сигнала на компьютере.

Рассмотрим несколько примеров определения спектров импульсных аналоговых сигналов с помощью теорем о свойствах преобразования Фурье.

Пример 2.2

Найдём основные характеристики и параметры аналогового импульсного сигнала $s(t)$, показанного на рис. 2.7. Параметры сигнала: $A = 2$ В, $\alpha = 3,14$ 1/мкс, $\tau_0 = 0,5$ мкс.

Из рис. 2.7 видно, что аналитическое выражение сигнала $s(t)$ может быть описано в виде суммы двух усеченных экспонент, одна из которых инвертирована во времени:

$$s(t) = s_1(t) - s_1(-t), \quad (2.34)$$

где сигнал $s_1(t)$ определяется выражением

$$s_1(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-\alpha t}, & t \in [0, \tau_0], \\ 0, & t \notin [0, \tau_0]. \end{cases} \quad (2.35)$$

Сигнал $s_1(t)$ можно выразить с помощью математических операций над односторонними экспонентами (рис. 2.8):

$$s_1(t) = A \cdot x(t) - B \cdot x(t - \tau_0), \quad (2.36)$$

где $x(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$, $B = A \cdot x(t)|_{t=\tau_0} = A \cdot x(\tau_0)$.

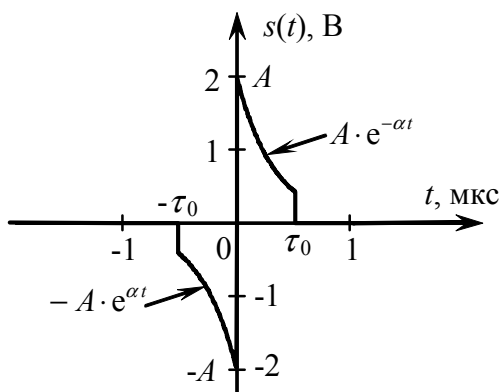


Рис. 2.7. Импульсный сигнал $s(t)$

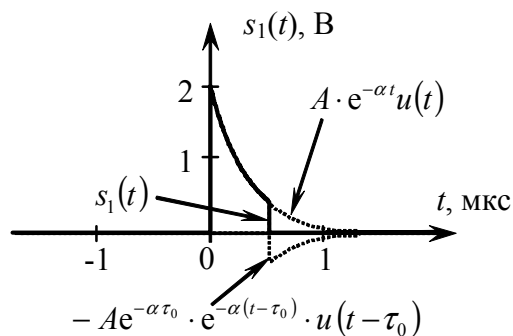


Рис. 2.8. Формирование сигнала $s_1(t)$

Подставив выражение (2.36) в (2.34), получим временную функцию искомого сигнала $s(t)$:

$$s(t) = A \cdot x(t) - B \cdot x(t - \tau_0) - A \cdot x(-t) + B \cdot x(-t + \tau_0). \quad (2.37)$$

Теперь по известному спектру экспоненциального сигнала (2.31) с использованием свойств линейности спектров и инвертирования сигнала во времени

$$\begin{aligned} a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} a \cdot S_1(f) + b \cdot S_2(f), \\ s(-t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} S^*(f), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где « $*$ » означает комплексное сопряжение, можно найти спектр сигнала $S(f)$:

$$\begin{aligned} S(f) &= A \cdot X(f) - B \cdot X(f) \cdot e^{-j2\pi f \tau_0} - A \cdot X^*(f) + B \cdot X^*(f) \cdot e^{j2\pi f \tau_0} = \\ &= A \cdot \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} - \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \right) + A \cdot x(\tau_0) \cdot \left(\frac{e^{j2\pi f \tau_0}}{\alpha - j2\pi f} - \frac{e^{-j2\pi f \tau_0}}{\alpha + j2\pi f} \right) = \\ &= j2\pi A \cdot \frac{\left[\frac{\alpha}{2\pi} \sin(2\pi f \tau_0) + 2f \cos(2\pi f \tau_0) \right] \cdot e^{-\alpha \tau_0} - 2f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Полученное выражение позволяет оценить особенности спектра сигнала $s(t)$. Спектр $S(f)$ является чисто мнимым, что соответствует свойству спектров для нечетных временных функций. Мнимая часть спектра сигнала $s(t)$ показана на рис. 2.9, амплитудный и фазовый спектры сигнала показаны на рис. 2.10.

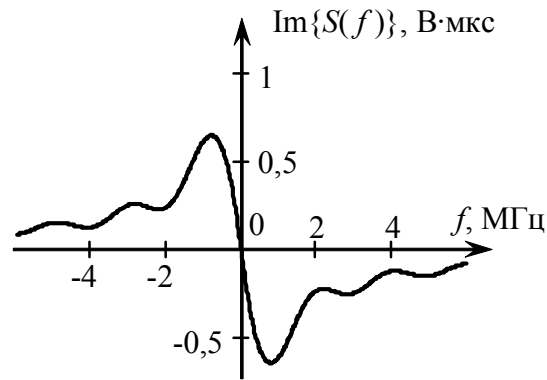


Рис. 2.9. Мнимая часть спектра импульсного аналогового сигнала $s(t)$

С помощью свойства площади преобразования Фурье (прил. 2, свойство 17) можно проверить правильность нахождения спектра сигнала:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = 0. \quad (2.40)$$

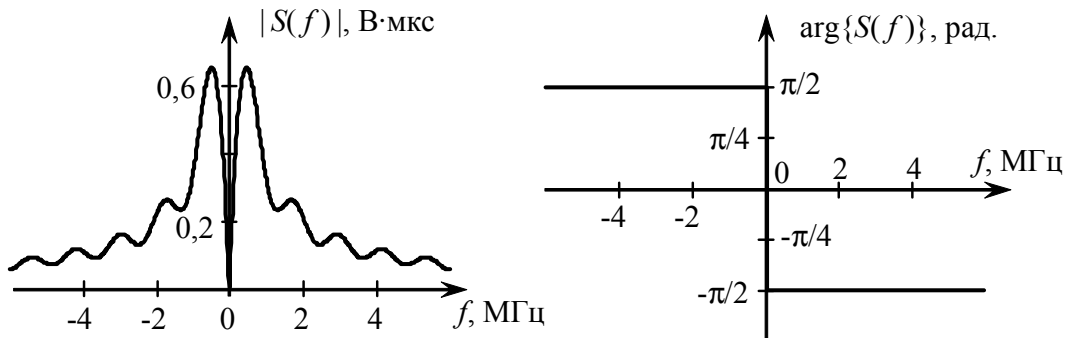


Рис. 2.10. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)$

Для определения эффективной ширины спектра сигнала найдём его энергию

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = 2 \int_0^{\tau_0} (A \cdot s_1(t))^2 dt = 2A^2 \int_0^{\tau_0} e^{-2\alpha t} dt = \frac{2A^2}{-2\alpha} \cdot e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\tau_0} \approx 1,21 \text{ В}^2 \cdot \text{мкс}. \quad (2.41)$$

На рис. 2.11 показана зависимость части энергии сигнала в полосе F_M от ширины интервала частот.

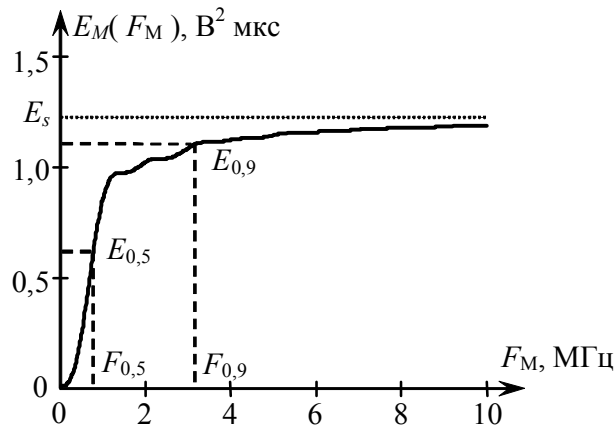


Рис. 2.11. Зависимость части энергии сигнала от ширины интервала частот

Из рис. 2.11 видно, что 50% энергии сигнала сконцентрировано в полосе от нуля до $F_{0,5} = 0,77 \text{ МГц}$, а 90% энергии сигнала находится в полосе частот от нуля до $F_{0,9} = 3,25 \text{ МГц}$.

Пример 2.3

С помощью теорем о свойствах преобразования Фурье найти и проанализировать спектр аналогового трапецеидального сигнала $s(t)$, изображенного на рис. 2.12 с амплитудой A и длительностью τ_0 .

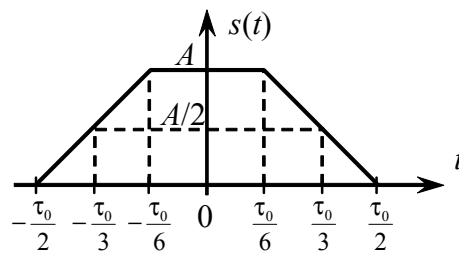


Рис. 2.12. Трапецеидальный сигнал

Аналитическое выражение сигнала $s(t)$ имеет следующий вид:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{3A}{2} + \frac{3A}{\tau_0}t, & -\frac{\tau_0}{2} \leq t < -\frac{\tau_0}{6}, \\ A, & -\frac{\tau_0}{6} \leq t < \frac{\tau_0}{6}, \\ \frac{3A}{2} - \frac{3A}{\tau_0}t, & \frac{\tau_0}{6} \leq t \leq \frac{\tau_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau_0}{2}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Вывод аналитического выражения для спектра сигнала $S(f)$ непосредственно прямым преобразованием Фурье (2.2) приведёт к громоздким преобразованиям и вызовет большие трудности. Воспользуемся тем, что трапецидальный сигнал $s(t)$ можно представить в виде свёртки двух прямоугольных импульсов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, изображённых на рис. 2.13:

$$s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) d\tau. \quad (2.43)$$

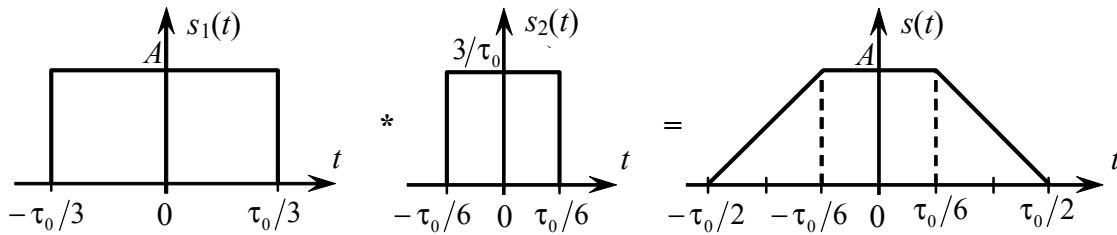


Рис. 2.13. Получение трапецидального сигнала

Прямоугольный импульс $s_1(t)$ имеет длительность $2\tau_0/3$, соответствующую длительности исходного трапецидального сигнала по уровню 0,5 относительно амплитудного значения A . Прямоугольный импульс $s_2(t)$ имеет длительность $\tau_0/3$ и амплитуду $3/\tau_0$, т.е. является импульсом с единичной площадью.

Графическое проведение свёртки по выражению (2.43) иллюстрируется рис. 2.14. На верхнем графике представлен первый сомножитель $s_1(\tau)$ подынтегрального выражения (2.43), следующий график показывает второй сомножитель $s_2(t - \tau)$ в зависимости от временного сдвига t . Отметим, что для $t > 0$ график второго сомножителя смещается вправо. Результат произведения двух сомножителей показан на третьем графике. Площадь под этим третьим графиком является результатом свёртки двух импульсов для конкретного временного сдвига t .

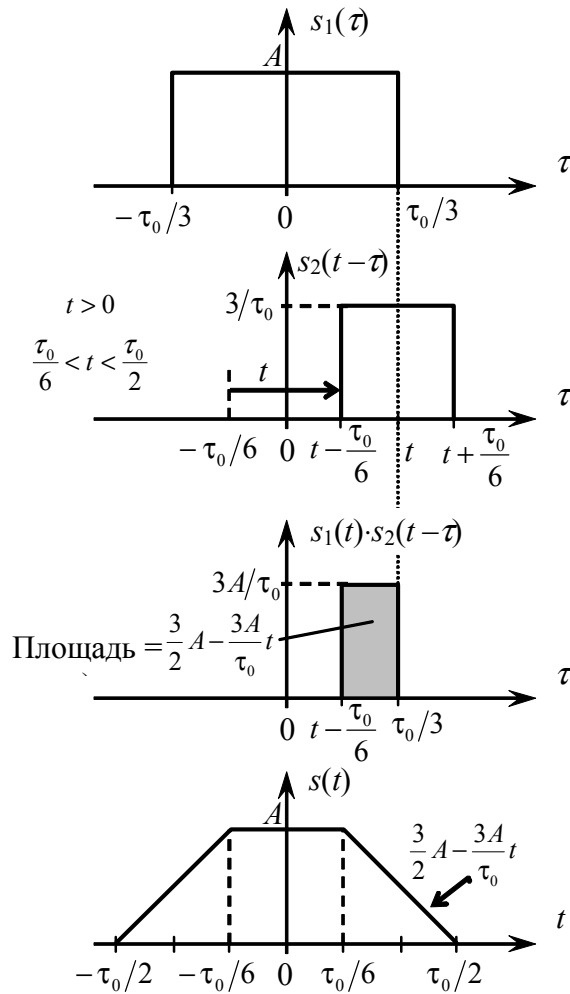


Рис. 2.14. Свёртка двух прямоугольных сигналов

Зависимость площади от временного сдвига t показана на нижнем графике рис. 2.14. Это и есть заданный трапецеидальный сигнал. Интересно отметить, что зависимость площади произведения на третьем графике совпадает с аналитическим выражением заданного сигнала (2.42) для соответствующего интервала $\tau_0/6 \leq t \leq \tau_0/2$.

Искомый спектр определяется по теореме о спектре свёртки сигналов:

$$s_1(t) * s_2(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} S_1(f) \cdot S_2(f). \quad (2.44)$$

Прямоугольный импульс длительностью T можно записать с использованием специальной функции:

$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-T/2, T/2), \\ 0, & t \notin (-T/2, T/2). \end{cases} \quad (2.45)$$

Спектр прямоугольного импульса амплитудой A и длительностью T определяется следующим соотношением:

$$A \cdot \text{rect}_T(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} AT \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \cdot \text{sinc}(\pi f T). \quad (2.46)$$

Подставляя выражения для спектров прямоугольных импульсов (2.46) в (2.44), получаем спектральную функцию сигнала $s(t)$:

$$\begin{aligned} S(f) &= S_1(f) \cdot S_2(f) = A \frac{2\tau_0}{3} \cdot \text{sinc}\left(\pi f \frac{2\tau_0}{3}\right) \cdot \frac{3}{\tau_0} \text{sinc}\left(\pi f \frac{\tau_0}{3}\right) = \\ &= \frac{2A\tau_0}{3} \cdot \text{sinc}\left(\pi f \frac{\tau_0}{3}\right) \cdot \text{sinc}\left(2\pi f \frac{\tau_0}{3}\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Спектр трапецеидального сигнала (рис. 2.15) является чётной действительной функцией, получаемой произведением спектров соответствующих прямоугольных сигналов. Спектры этих сигналов условно изображены на рис. 2.15 пунктирными линиями. Ширина главного лепестка амплитудного спектра составляет F , а уровень первого бокового лепестка составляет 0,086 от максимума.

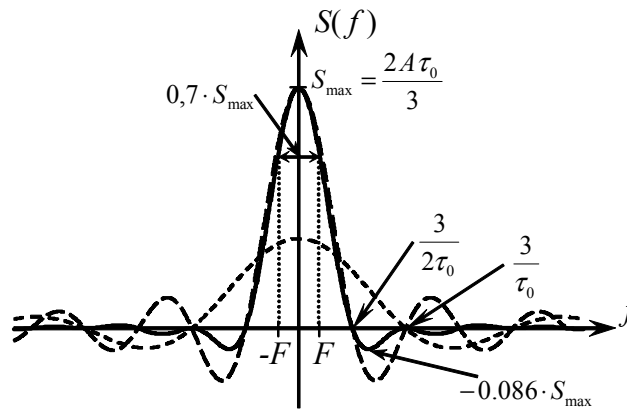


Рис. 2.15. Получение спектра трапецеидального сигнала

Значительно более наглядно эти параметры выглядят на графике амплитудного спектра, представленного в логарифмическом масштабе (2.22) на рис. 2.16. Для сравнения на рис. 2.16 пунктиром показан амплитудный спектр прямоугольного импульса с длительностью, равной длительности трапецеидального импульса по уровню 0,5 от амплитудного значения. Видно, что форма главных лепестков спектров этих сигналов практически одинакова, т.е. они имеют примерно одинаковую ширину спектра. Однако уровень первого бокового лепестка спектра трапецеидального сигнала на 8 дБ ниже уровня бокового лепестка прямоугольного сигнала.

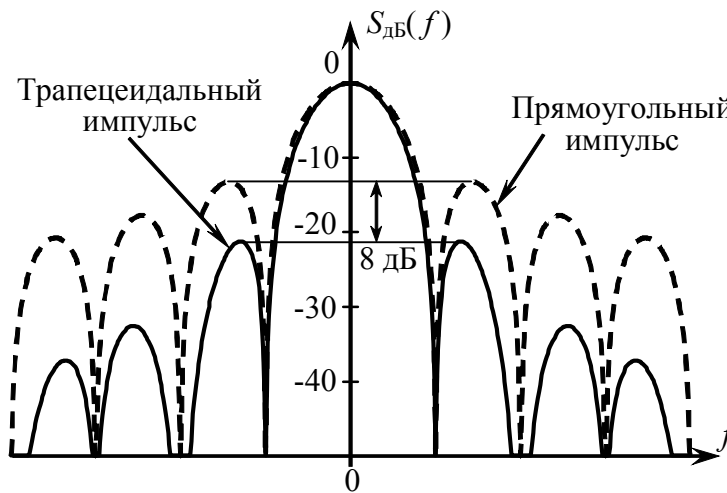


Рис. 2.16. Амплитудный спектр в логарифмическом масштабе

Интересно отметить, что максимальное значение спектра сигнала $2A\tau_0/3$ совпадает с площадью исходного трапецидального сигнала. Это универсальное свойство спектров можно использовать, в частности, для проверки правильности нахождения спектра сигнала.

Пример 2.4

Рассмотрим пример нахождения характеристик аналогового импульсного сигнала (рис. 2.17), заданного выражением

$$s(t) = \begin{cases} A - B \cdot t, & t \in (0, \tau_0), \\ 0, & t \notin (0, \tau_0). \end{cases} \quad (2.48)$$

Параметры сигнала: $A = 1$ В, $B = 0,5$ В/мкс, $\tau_0 = 2$ мкс.

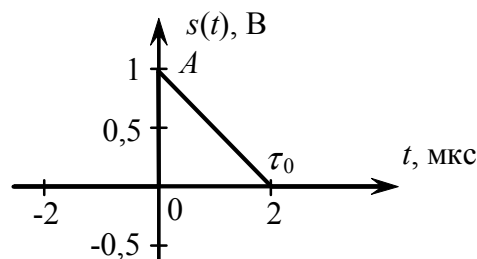


Рис. 2.17. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$

Для определения аналитического выражения спектра сигнала $s(t)$ воспользуемся свойствами преобразования Фурье. Поскольку в таблице прил. 1 нет сигналов, похожих на заданный сигнал $s(t)$, попробуем получить типовые сигналы с помощью математических операций над ним.

Продифференцируем сигнал $s(t)$ по времени

$$s'(t) = \frac{d s(t)}{dt} = A \cdot \delta(t) - \frac{A}{\tau_0} \text{rect}_{\tau_0} \left(t - \frac{\tau_0}{2} \right), \quad (2.49)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция; $\text{rect}_{\tau_0}(t)$ – прямоугольный импульс длительностью τ_0 , определяемый следующим соотношением:

$$\text{rect}_{\tau_0}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\tau_0/2, \tau_0/2), \\ 0, & t \notin (-\tau_0/2, \tau_0/2). \end{cases} \quad (2.50)$$

График функции сигнала $s'(t)$ показан на рис. 2.18.

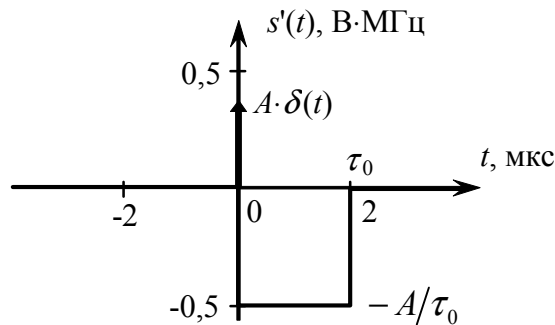


Рис. 2.18. Первая производная сигнала $s(t)$ по времени

Спектры каждой из компонент сигнала $s'(t)$ приведены в таблице прил. 1, поэтому можно записать

$$S'(f) = A - A \cdot \frac{\sin \pi f \tau_0}{\pi f \tau_0} \cdot e^{-j\pi f \tau_0} = A \cdot \left(1 - \text{sinc}(\pi f \tau_0) \cdot e^{-j\pi f \tau_0} \right). \quad (2.51)$$

Для нахождения аналитического выражения спектра сигнала $s(t)$ воспользуемся свойством интегрирования:

$$\begin{aligned} s'(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} S'(f) \\ s(t) = \int_{-\infty}^t s'(\tau) d\tau &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{S'(f)}{j2\pi f} + \frac{S'(0)}{2} \cdot \delta(f) = S(f). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Поскольку в данном случае $S'(0) = 0$, получаем

$$S(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot S'(f) = \frac{A}{j2\pi f} \cdot \left(1 - \text{sinc}(\pi f \tau_0) \cdot e^{-j\pi f \tau_0} \right). \quad (2.53)$$

На рис. 2.19 представлены действительная и мнимая части спектра сигнала, а на рис. 2.20 – амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)$.

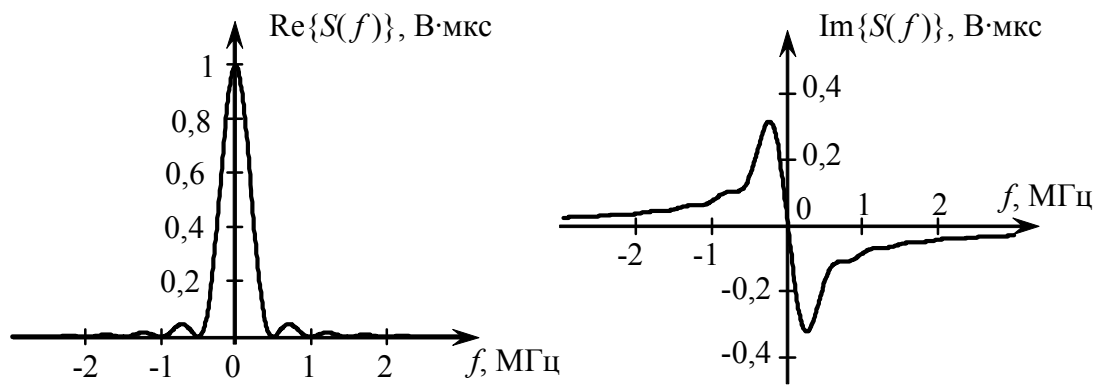


Рис. 2.19. Действительная и мнимая части спектра сигнала $s(t)$

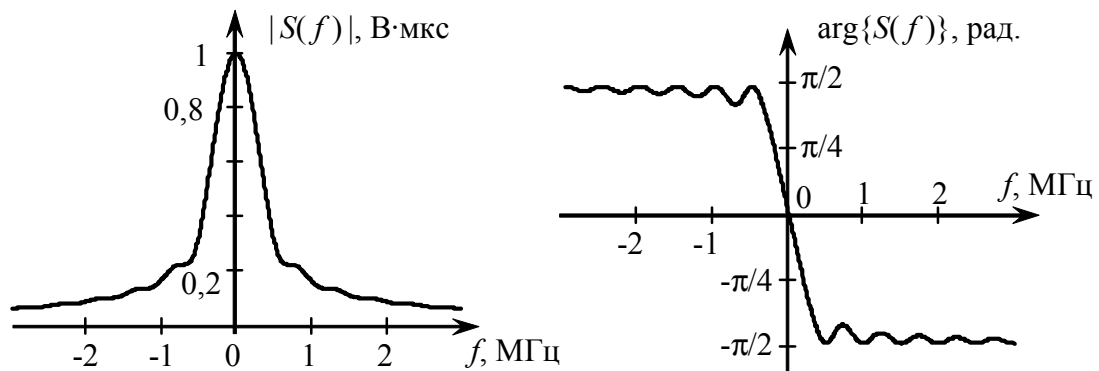


Рис. 2.20. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)$

Проанализируем полученный спектр $S(f)$. Модуль спектра (АС) представляет собой произведение двух функций: гиперболы $A/2\pi f$, вызванной скачком напряжения на величину A (рис 2.17), и спектра $|S'(f)|/A$, представленных на рис. 2.21. Результат произведения этих двух функций показан на рис. 2.22.

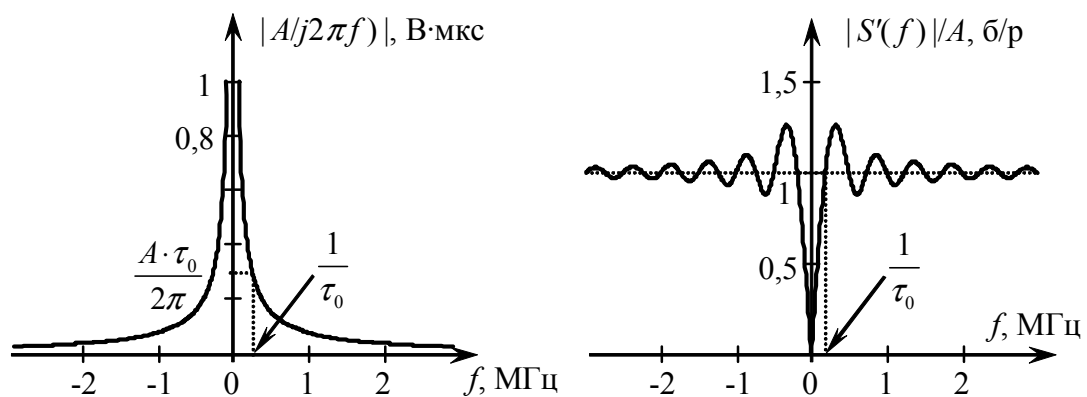


Рис. 2.21. Составляющие амплитудного спектра $|S(f)|$ аналогового импульсного сигнала $s(t)$

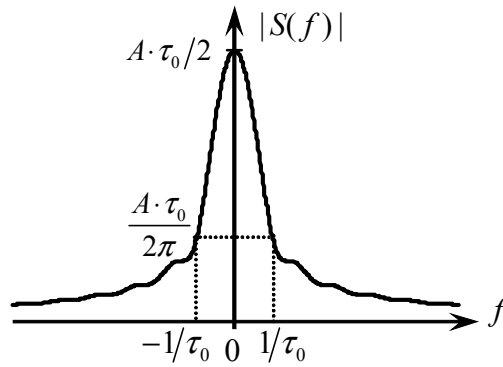


Рис. 2.22. Амплитудный спектр сигнала $s(t)$

В амплитудном спектре сигнала $s(t)$ максимальное значение $S(0)$ может быть определено по свойству площади преобразования Фурье как площадь исходного треугольного импульса:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = \frac{1}{2} \cdot A\tau_0 = 1 \text{ В} \cdot \text{мкс.} \quad (2.54)$$

Ширина спектра и пульсации амплитудного спектра вокруг гиперболы определяются длительностью треугольного сигнала τ_0 .

Определим энергию сигнала $s(t)$. Для упрощения расчетов учтём, что энергия сигнала не зависит от положения сигнала на оси времени и от его инверсии по времени, поэтому расположим сигнал так, как показано на рис. 2.23.

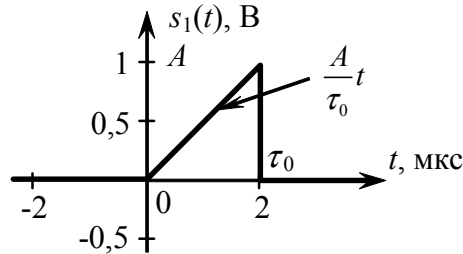


Рис. 2.23. Треугольный импульс, полученный из исходного сигнала $s(t)$

Энергия сигнала $s(t)$ равна энергии сигнала $s_1(t)$ и определяется следующим образом:

$$E_s = \int_0^{\tau_0} s_1^2(t) dt = \int_0^{\tau_0} \frac{A^2}{\tau_0^2} t^2 dt = \frac{A^2}{\tau_0^2} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\tau_0} = \frac{A^2 \tau_0}{3} \approx 0,66 \text{ В}^2 \cdot \text{мкс.} \quad (2.55)$$

Энергетический спектр сигнала $s(t)$ может быть определён следующим образом:

$$W_s(f) = |S(f)|^2 = \left(\frac{A}{2\pi f} \right)^2 \cdot \left| 1 - \text{sinc}(\pi f \tau_0) \cdot e^{-j\pi f \tau_0} \right|^2. \quad (2.56)$$

Энергетический спектр сигнала $s(t)$ показан на рис. 2.24.

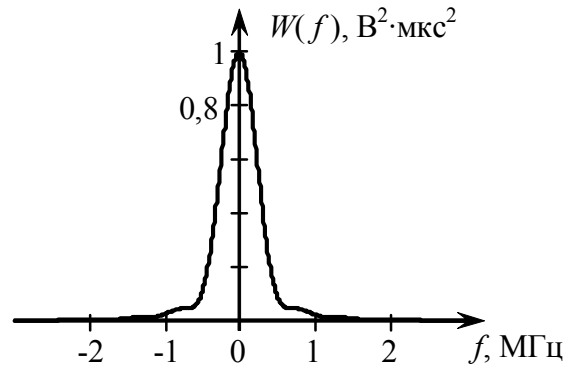


Рис. 2.24. Энергетический спектр сигнала $s(t)$

Определим эффективную ширину полосы частот сигнала $s(t)$ по графику, показанному на рис. 2.25.

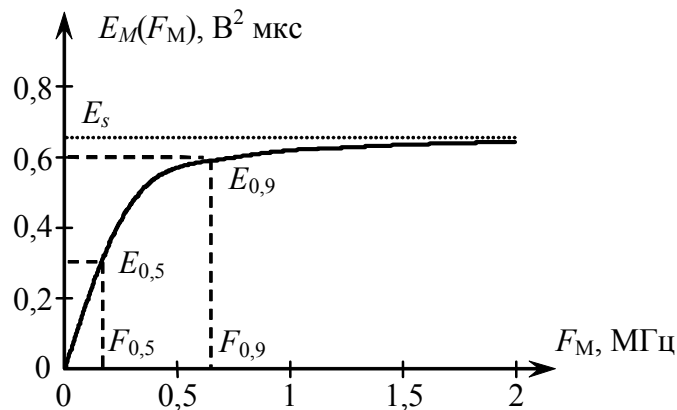


Рис. 2.25. Зависимость части энергии сигнала от полосы частот

Для восстановления сигнала по его спектру в эффективной полосе частот воспользуемся формулой обратного преобразования Фурье (2.19):

$$s_M(t) = \int_{-F_M}^{F_M} S(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (2.57)$$

На рис. 2.26 показаны сигналы, восстановленные из спектра $S(f)$ в полосе частот, в которой сконцентрировано 50% и 90 % энергии сигнала $s(t)$. Из рис. 2.26 видно, что сигнал, восстановленный по 50% энергии не похож на исходный треугольный импульс, в то время как восстановление сигнала по 90% энергии привело к значительному уменьшению ошибки восстановления.

Увеличение параметра M , т.е. расширение полосы частот F_M приводит к уменьшению энергии разностного сигнала E_{Δ} (2.21). Особого внимания заслуживает то, как восстанавливается скачкообразное изменение исходного сигнала.

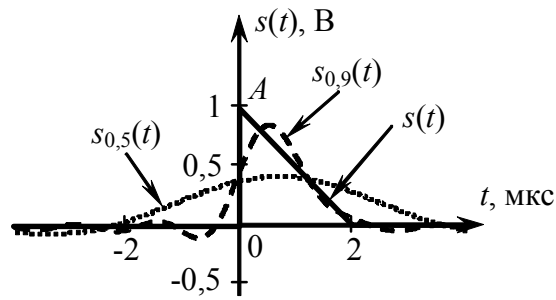


Рис. 2.26. Сравнение аналогового импульсного сигнала $s(t)$ с сигналами, восстановленными по разным полосам частот

Во-первых, все восстановленные сигналы проходят через середину скачка. Во-вторых, отклонение восстановленного сигнала от исходного имеет максимальную величину вблизи скачка. Максимальное отклонение определяется величиной скачка A и составляет примерно 12% от величины скачка. Такое поведение восстановленного сигнала вблизи скачка носит название эффекта Гиббса. В-третьих, период колебаний в восстановленном сигнале уменьшается с ростом эффективной полосы F_M . И, наконец, скорость спада амплитуды колебаний увеличивается с ростом F_M , что и объясняет в конечном итоге уменьшение энергии разностного сигнала при увеличении F_M .

Пример 2.5

С помощью теорем о свойствах преобразования Фурье найдём аналитическое выражение спектра сигнала

$$s(t) = A_0 \cdot \frac{\sin \pi f_0 t}{\pi f_0 t} = A_0 \cdot \text{sinc}(\pi f_0 t) \quad (2.58)$$

для $A_0 = 2$ В, $f_0 = 2$ МГц и построим графики амплитудного и фазового спектров.

Из графика функции сигнала $s(t)$, показанного на рис. 2.27, видно, что форма сигнала с точностью до постоянных коэффициентов совпадает с формой спектра прямоугольного импульса (прил. 1). Это означает, что спектр сигнала $s(t)$ может быть найден с помощью свойства дуальности частоты и времени (прил. 2):

$$\begin{aligned} s(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} C(f), \\ s_1(t) = A \cdot C(\alpha t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} B \cdot s(-\beta f) = C_1(f), \end{aligned} \quad (2.59)$$

где A, B – амплитудные коэффициенты; α и β – масштабные коэффициенты.

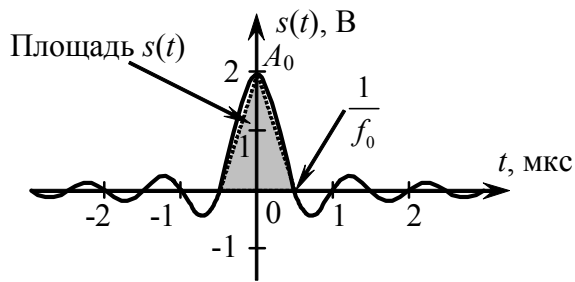


Рис. 2.27. Сигнал $s(t)$.

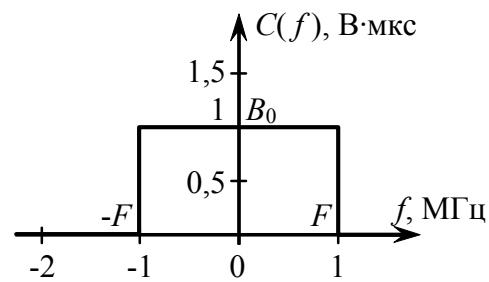


Рис. 2.28. Спектр сигнала $s(t)$.

Таким образом, спектр заданного сигнала $s(t)$ имеет форму прямоугольника на оси частот с неизвестными параметрами высоты B_0 и граничной частоты F , представленного на рис 2.28:

$$C(f) = \begin{cases} B_0, & f \in (-F, F) \\ 0, & f \notin (-F, F) \end{cases} = \text{Rect}_{2F}(f). \quad (2.60)$$

Коэффициент B_0 найдём исходя из свойства площади сигнала. Площадь под функцией вида $\text{sinc}(x)$ равна площади треугольника, вписанного в главный лепесток функции:

$$B_0 = C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = \frac{A_0}{f_0} = 1 \text{ В} \cdot \mu\text{с}. \quad (2.61)$$

Граничную частоту F можно определить по свойству площади спектра:

$$A_0 = s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) df = B_0 \cdot 2F = 2 \text{ В}. \quad (2.62)$$

Отсюда получим $F = f_0/2 = 1 \text{ МГц}$. Спектр сигнала $s(t)$ является действительной чётной функцией.

Пример 2.6

С использованием теорем о свойствах преобразования Фурье найдём аналитическое выражение спектра сигнала

$$s(t) = A \frac{\gamma^2}{t^2 + \gamma^2} \quad (2.63)$$

для $A = 3 \text{ В}$, $\gamma = 0,5 \text{ мкс}$, и построим графики амплитудного и фазового спектров.

Вычисление спектра сигнала $s(t)$ непосредственно по формуле прямого преобразования Фурье (2.2) весьма затруднительно. Другой путь нахождения спектра состоит в использовании свойства дуальности преобразования Фурье

(прил. 2, свойство 6). Для этого нужно найти в таблице преобразований Фурье (прил. 1) спектр, совпадающий по форме (с точностью до коэффициентов) с заданным сигналом.

На первый взгляд среди функций спектров приложения 1 нет такого спектра, который по форме совпадал бы с заданным сигналом. Однако сигнал $s(t)$ задан в виде рациональной функции (отношение полиномов по степеням t), а её можно алгебраически разложить на сумму простых дробей вида:

$$s(t) = A \frac{\gamma^2}{t^2 + \gamma^2} = \frac{A\gamma}{2} \left(\frac{1}{\gamma + jt} + \frac{1}{\gamma - jt} \right). \quad (2.64)$$

Очевидно, что первая дробь в (2.64) совпадает по форме со спектром односторонней экспоненты (2.31), а вторая дробь подобна спектру инвертированной по времени односторонней экспоненты (прил. 2, свойство 2):

$$\begin{aligned} C_1(f) &= \frac{B}{\alpha + j2\pi f} + \frac{B}{\alpha - j2\pi f} \\ \Downarrow \quad \quad \Downarrow \quad \quad \Downarrow & \\ s_1(t) &= B \cdot e^{-\alpha t} u(t) + B \cdot e^{\alpha t} u(-t) = B \cdot e^{-\alpha|t|}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Воспользуемся свойством дуальности частоты и времени (2.59):

$$\begin{aligned} s(t) = A \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + t^2} &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} C(f) = D \cdot e^{-\beta|f|} \\ s_1(t) = B \cdot e^{-\alpha|t|} &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} C_1(f) = \frac{2B\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2B}{\alpha} \frac{(\alpha/2\pi)^2}{(\alpha/2\pi)^2 + f^2}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Искомый спектр $C(f)$ имеет такую же форму, что и сигнал $s_1(t)$. Осталось только найти коэффициенты D и β . Для этого можно воспользоваться свойством площади сигнала и его спектра (прил. 2, свойство 17).

Рассмотрим это свойство для полностью известного сигнала $s_1(t)$ и его спектра $C_1(f)$, изображённых на рис. 2.29.

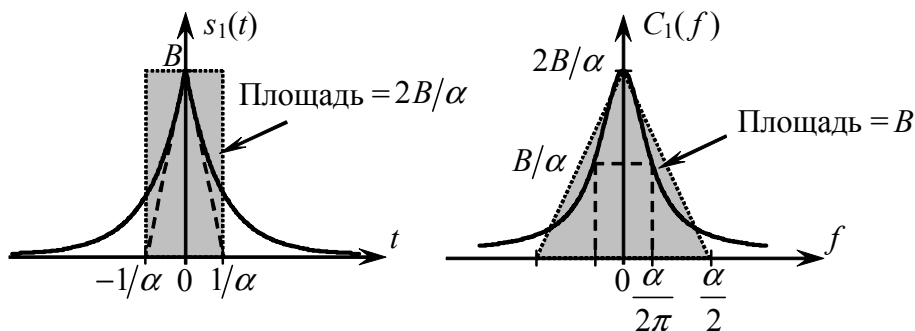


Рис. 2.29. Свойство площади для сигнала и спектра

Запишем для них свойство площади:

$$C_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) dt = \frac{2B}{\alpha},$$

$$s_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1(f) df = \frac{2B}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} = B. \quad (2.67)$$

Главным выводом из (2.67) является правило для нахождения площади под функцией вида (2.63). Она эквивалентна площади треугольника, высота которого равна амплитуде сигнала, а основание треугольника в π раз больше, чем ширина сигнала по уровню 0,5 от максимального значения (амплитуды) сигнала.

Заданный сигнал $s(t)$ и его спектр $C(f)$ представлены на рис. 2.30. Площадь сигнала $s(t)$ находится по аналогии с площадью спектра $C_1(f)$ через площадь эквивалентного треугольника (2.67):

$$C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = D = A \cdot \pi\gamma = 4,71 \text{ В}\cdot\text{мкс}. \quad (2.68)$$

Коэффициент β находим исходя из площади спектра $C(f)$:

$$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) df = A\pi\gamma \cdot \frac{2}{\beta} = A \Rightarrow \beta = 2\pi\gamma = 3,14 \text{ мкс}. \quad (2.69)$$

Таким образом, окончательное выражение спектра сигнала $s(t)$ будет следующим:

$$S(f) = A\pi\gamma \cdot e^{-2\pi\gamma|f|}. \quad (2.70)$$

Сигнал $s(t)$ и его спектр показаны на рис. 2.30. Из выражения (2.70) видно, что $S(f)$ является положительной действительной функцией на всей частотной оси, следовательно, фазовый спектр и мнимая часть спектра $S(f)$ будут тождественно равны нулю.

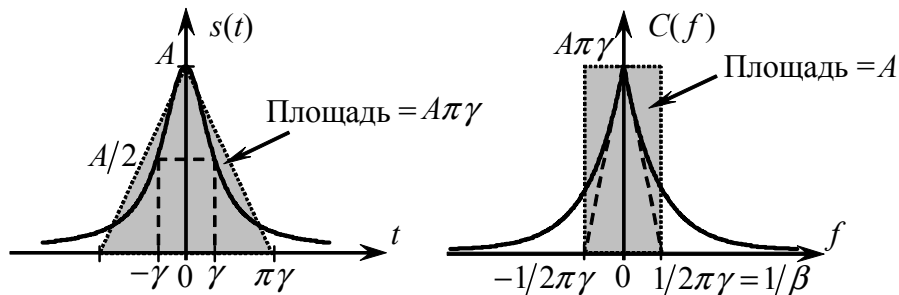


Рис. 2.30. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$ и его спектр $C(f)$.

Рассмотрим примеры нахождения автокорреляционной функции (АКФ) аналоговых импульсных сигналов.

Пример 2.7

Найдём АКФ и энергетический спектр аналогового импульсного сигнала (2.29), рассмотренного в примере 2.1. АКФ любого сигнала в общем виде находится с помощью формулы (2.23). В результате подстановки (2.29) в (2.23) получим

$$\begin{aligned}
 R_S(t) &= s(t) * s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(\tau-t) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha\tau} u(\tau) \cdot A \cdot e^{-\alpha(\tau-t)} u(\tau-t) d\tau = \\
 &= A^2 \cdot e^{\alpha t} \int_t^{\infty} e^{-2\alpha\tau} d\tau = \frac{A^2 \cdot e^{\alpha t}}{-2\alpha} (0 - e^{-2\alpha t}) = \frac{A^2 \cdot e^{-\alpha t}}{2\alpha}, t \geq 0. \quad (2.71)
 \end{aligned}$$

Математические действия, представленные при выводе конечного выражения формулы (2.71), поясняются рис. 2.31.

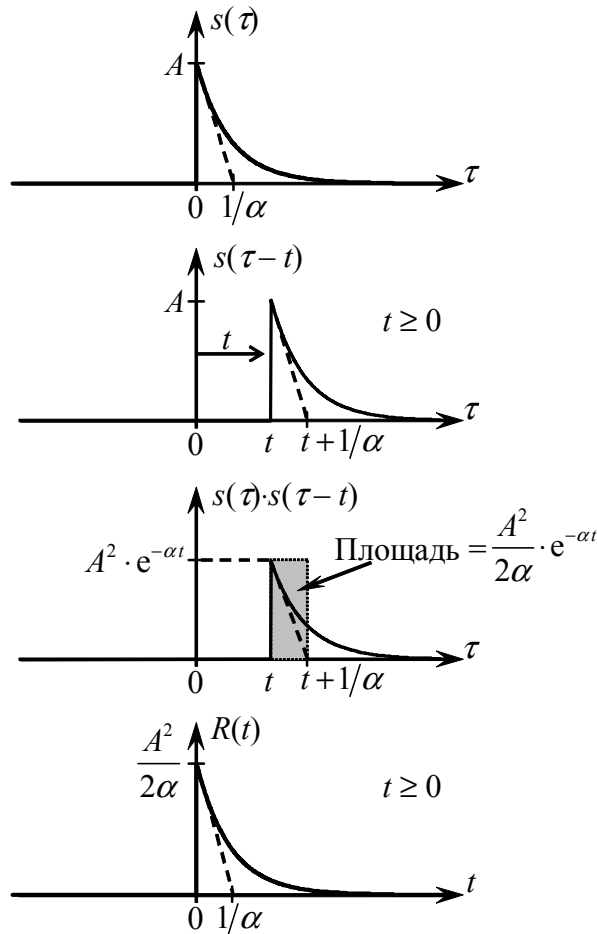


Рис. 2.31. Определение АКФ односторонней экспоненты

На верхнем графике изображена исходная односторонняя экспонента $A \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot u(\tau)$. На следующем графике эта экспонента задержана на время $t > 0$. Третий график представляет результат произведения двух предыдущих графиков. Очевидно, что результат произведения зависит от величины сдвига по времени t , являющегося параметром этого произведения. На нижнем графике изображена зависимость площади третьего графика от параметра t . Эта зависимость и является искомой АКФ.

Поскольку АКФ действительных сигналов обладает четной симметрией, окончательное выражение для АКФ сигнала $s(t)$ будет определяться соотношением

$$R_s(t) = \frac{A^2}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha|t|}. \quad (2.72)$$

График АКФ сигнала показан на рис. 2.32. Энергетический спектр сигнала $s(t)$ может быть найден с помощью прямого преобразования Фурье от АКФ 2.72 или с использованием выражения (2.26):

$$W_s(f) = |S(f)|^2 = \frac{A^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}. \quad (2.73)$$

Энергетический спектр сигнала $s(t)$ показан на рис. 2.33. Из рис. 2.32 и 2.33 видно, что АКФ и энергетический спектр являются четными затухающими функциями.

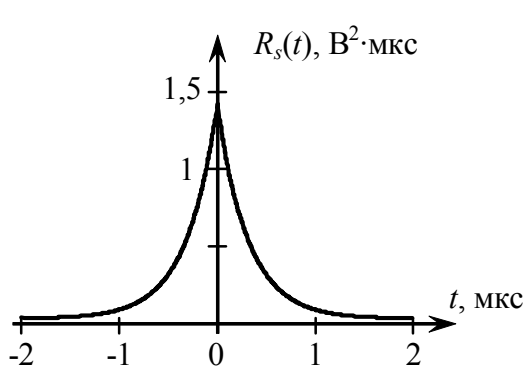


Рис. 2.32. АКФ сигнала $s(t)$

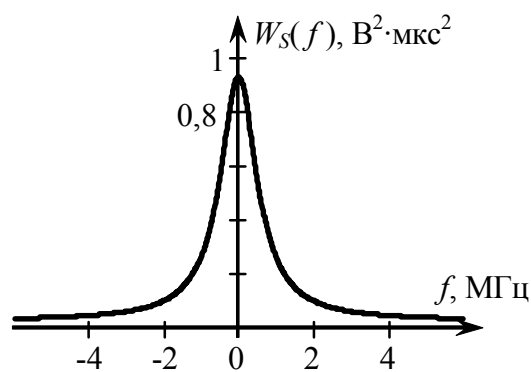


Рис. 2.33. Энергетический спектр $W(f)$

Для проверки правильности нахождения АКФ и энергетического спектра сигнала $s(t)$ можно воспользоваться теоремой Парсеваля для аналоговых импульсных сигналов и свойством площади для преобразования Фурье:

$$E_s = R_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) df = \frac{A^2}{2\alpha} \approx 1,43 \text{ В}^2 \cdot \text{мкс}, \quad (2.74)$$

$$W_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(t) dt = \frac{A^2}{\alpha^2} \approx 0,91 \text{ В}^2 \cdot \text{мкс}^2. \quad (2.75)$$

Найденные значения энергии сигнала и значения энергетического спектра в нуле совпадают с соответствующими точками на графиках функций $R_s(t)$ и $W_s(f)$.

Пример 2.8

Определим аналитические выражения и построим графики АКФ и энергетического спектра импульсного сигнала $s(t)$, показанного на рис. 2.34. Параметры сигнала: $A = 2 \text{ В}$, $\tau_0 = 1 \text{ мкс}$.

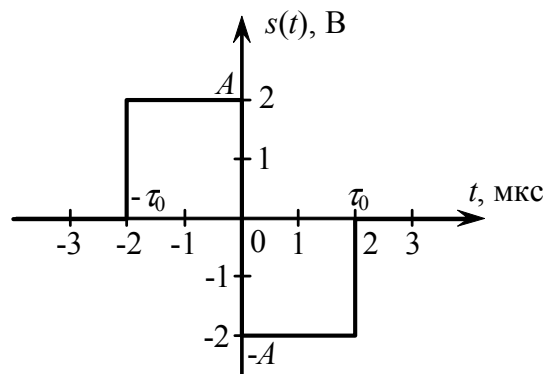


Рис. 2.34. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$

Представим сигнал $s(t)$ в виде свёртки двух сигналов: прямоугольного импульса $s_1(t)$ длительностью τ_0 (2.50) и пары δ -функций, показанных на рис. 2.35:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) * \Delta(t) = A \cdot \text{rect}_{\tau_0}(t) * [\delta(t + \tau_0/2) - \delta(t - \tau_0/2)] = \\ &= A \cdot \text{rect}_{\tau_0}(t + \tau_0/2) - A \cdot \text{rect}_{\tau_0}(t - \tau_0/2). \end{aligned} \quad (2.76)$$

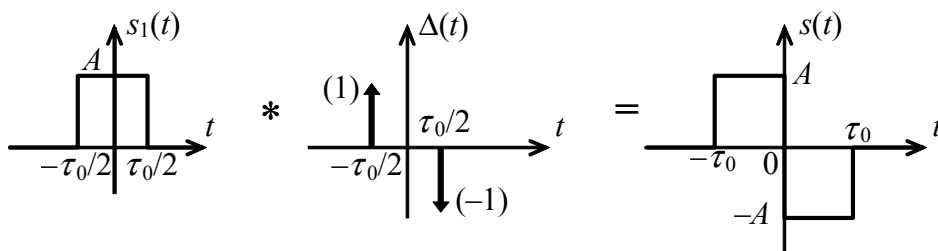


Рис. 2.35. Процедура формирования сигнала $s(t)$

С учетом (2.76) АКФ сигнала $s(t)$ может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= s(t) * s(-t) = [s_1(t) * \Delta(t)] * [s_1(-t) * \Delta(-t)] = \\
 &= s_1(t) * \Delta(t) * s_1(-t) * \Delta(-t) = \\
 &= [s_1(t) * s_1(-t)] * [\Delta(t) * \Delta(-t)] = \\
 &= R_1(t) * R_\Delta(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.77}$$

Найдём каждую из сворачиваемых компонент $R_1(t)$ и $R_\Delta(t)$ по отдельности. Определение автокорреляционной функции прямоугольного импульса $R_1(t)$ для $t > 0$ показано на рис. 2.36.

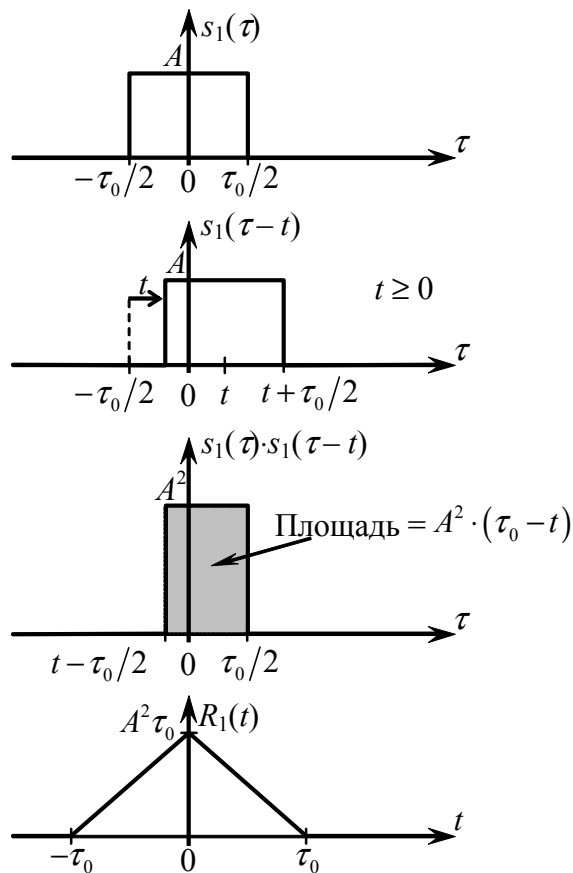


Рис. 2.36. Определение АКФ прямоугольного импульса

Верхний график показывает исходный прямоугольный импульс $s_1(\tau)$, на следующем графике показан тот же импульс, задержанный на время $t > 0$. Результат произведения этих двух графиков зависит от t , а площадь произведения в зависимости от t и является искомой АКФ прямоугольного импульса. Поскольку АКФ является чётной функцией $R_1(t) = R_1(-t)$, окончательный график будет иметь вид треугольника, он изображён на нижнем графике рис. 2.36.

Ниже представлен аналитический вывод выражения, поясняющие графическое определение АКФ прямоугольного импульса:

$$\begin{aligned}
 R_1(t) &= s_1(t) * s_1(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\tau_0}(\tau) \cdot \text{rect}_{\tau_0}(\tau-t) d\tau = \\
 &= \begin{cases} \int_{-\tau_0/2+t}^{\tau_0/2} A^2 d\tau, & 0 \leq t \leq \tau_0 \\ \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2+t} A^2 d\tau, & -\tau_0 \leq t < 0 \\ 0 & |t| > \tau_0 \end{cases} = \begin{cases} A^2(\tau_0 - t), & 0 \leq t \leq \tau_0 \\ A^2(\tau_0 + t), & -\tau_0 \leq t < 0 \\ 0 & |t| > \tau_0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} A^2(\tau_0 - |t|), & |t| \leq \tau_0, \\ 0 & |t| > \tau_0. \end{cases} \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Теперь определим вторую компоненту $R_{\Delta}(t)$ искомой АКФ. Поскольку функция $\Delta(t)$ состоит только из δ -функций, воспользуемся правилом для свёртки δ -функций:

$$A \cdot \delta(t-T_1) * \delta(t-T_2) = A \cdot \delta(t-(T_1+T_2)). \quad (2.79)$$

Автокорреляционная функция сигнала $\Delta(t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 R_{\Delta}(t) &= \Delta(t) * \Delta(-t) = \\
 &= \left[\delta\left(t + \frac{\tau_0}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau_0}{2}\right) \right] * \left[\delta\left(t - \frac{\tau_0}{2}\right) - \delta\left(t + \frac{\tau_0}{2}\right) \right] = \\
 &= \delta\left(t - \frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau_0}{2} - \frac{\tau_0}{2}\right) - \delta\left(t + \frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0}{2}\right) + \delta\left(t + \frac{\tau_0}{2} - \frac{\tau_0}{2}\right) = \\
 &= \delta(t) - \delta(t - \tau_0) - \delta(t + \tau_0) + \delta(t) = 2\delta(t) - \delta(t + \tau_0) - \delta(t - \tau_0). \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

Результаты определения корреляционных функций $R_1(t)$ и $R_{\Delta}(t)$ показаны на рис. 2.37.

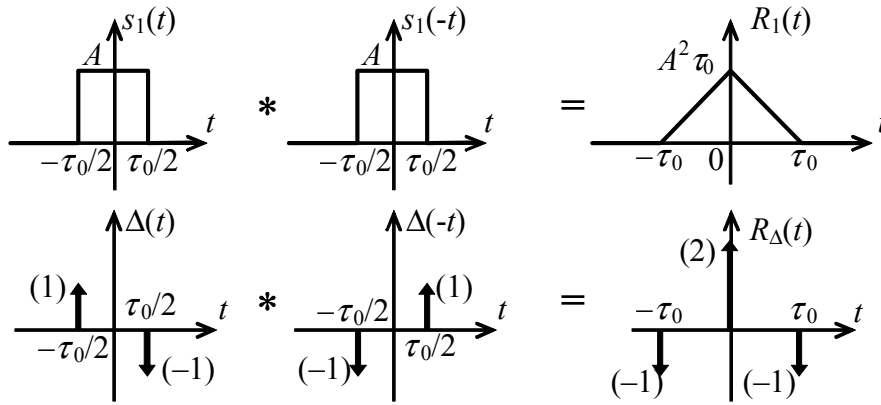


Рис. 2.37. АКФ сигналов $s_1(t)$ и $\Delta(t)$

Таким образом, автокорреляционная функция сигнала $s(t)$ может быть получена свёрткой функций $R_1(t)$ и $R_\Delta(t)$ (рис. 2.38):

$$\begin{aligned}
 R(t) &= R_1(t) * R_\Delta(t) = R_1(t) * \{2\delta(t) - \delta(t + \tau_0) - \delta(t - \tau_0)\} = \\
 &= 2R_1(t) - R_1(t + \tau_0) - R_1(t - \tau_0).
 \end{aligned}
 \tag{2.81}$$

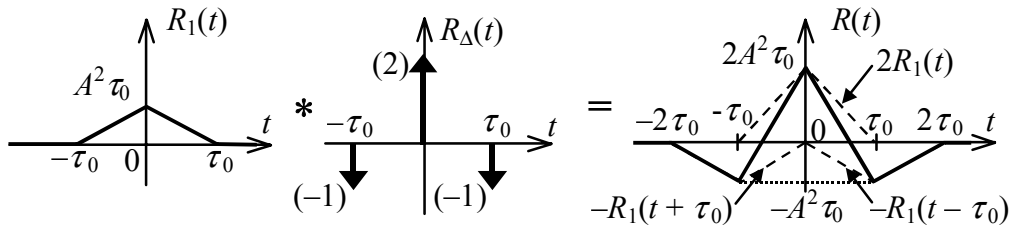


Рис. 2.38. Процедура определения АКФ сигнала $s(t)$

Энергетический спектр сигнала $s(t)$ найдем с помощью свойства преобразования Фурье для свёртки функций во временной области:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= s(t) * s(-t) = R_1(t) * R_\Delta(t) \\
 \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow & \\
 W(f) &= S(f) \cdot S^*(f) = W_1(f) \cdot W_\Delta(f),
 \end{aligned}
 \tag{2.82}$$

причём

$$\begin{aligned}
 R_1(t) &= s_1(t) * s_1(-t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} W_1(f) = S_1(f) \cdot S_1^*(f) = |S_1(f)|^2 \\
 R_\Delta(t) &= s_\Delta(t) * s_\Delta(-t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} W_\Delta(f) = S_\Delta(f) \cdot S_\Delta^*(f) = |S_\Delta(f)|^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.83}$$

Спектры прямоугольного импульса $S_1(f)$ и суммы задержанных δ -функций хорошо известны:

$$\begin{aligned}
 s_1(t) = A \cdot \text{rect}_{\tau_0}(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} S_1(f) = A\tau_0 \cdot \text{sinc}(\pi f\tau_0) \\
 \sum_k B_k \cdot \delta(t - \tau_k) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \sum_k B_k \cdot e^{-j2\pi f\tau_k}.
 \end{aligned}
 \tag{2.84}$$

Таким образом, с учетом формулы Эйлера и тригонометрического тождества

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x
 \tag{2.85}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 W(f) &= |A\tau_0 \cdot \text{sinc}(\pi f\tau_0)|^2 \cdot (2 - e^{-j2\pi f\tau_0} - e^{j2\pi f\tau_0}) = \\
 &= (A\tau_0)^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi f\tau_0) \cdot (2 - 2\cos(2\pi f\tau_0)) = \\
 &= 4A^2\tau_0^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi f\tau_0) \cdot \sin^2(\pi f\tau_0).
 \end{aligned}
 \tag{2.86}$$

Автокорреляционная функция аналогового импульсного сигнала $s(t)$ и его энергетический спектр показаны на рис. 2.39 и 2.40 соответственно.

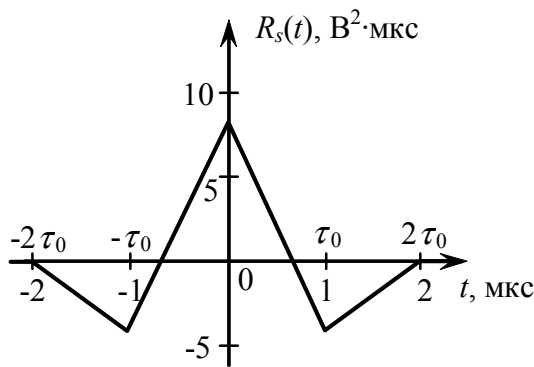


Рис. 2.39. АКФ сигнала $s(t)$

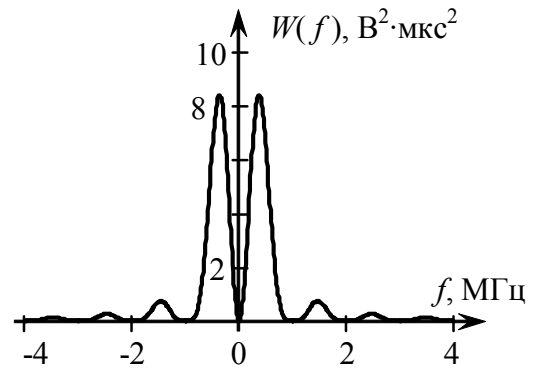


Рис. 2.40. Энергетический спектр $W(f)$

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и энергетического спектра сигнала $s(t)$ воспользуемся теоремой Парсеваля для импульсных сигналов и свойством преобразования Фурье для АКФ сигнала:

$$E_s = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) df = 8 \text{ В}^2 \cdot \text{мкс};
 \tag{2.87}$$

$$W(0) = \int_{-2\tau_0}^{2\tau_0} R(t) dt = 0,
 \tag{2.88}$$

где E_s – энергия сигнала $s(t)$.

Выводы по разделу

Аналоговые импульсные сигналы с ограниченной энергией описываются функциями времени, имеющими конечную эффективную длительность. Прямое преобразование Фурье от временной функции сигнала даёт спектральную функцию сигнала, называемую спектром импульсного сигнала. Для нахождения спектра целесообразно представить сигнал в виде совокупности более простых табличных функций времени, математические операции над которыми (суммирование, дифференцирование, умножение, свёртка, сдвиг по оси времени, изменение масштаба и т.д.) дают исходный заданный импульсный сигнал. Тогда спектр определяется без прямого вычисления интеграла Фурье с помощью таблиц пар преобразований Фурье и теорем о свойствах преобразований Фурье для использованных математических операций.

Спектральная функция действительного импульсного сигнала в общем случае является комплексной функцией частоты и отображается в виде пары графиков, соответствующих её действительной и мнимой частям или модулю и аргументу комплексной функции. Если импульсный сигнал обладает чётной симметрией, его спектр описывается действительной чётной функцией. Нечётный импульс имеет мнимый нечётный спектр. Временная и частотная функции сигнала обладают свойством дуальности частоты и времени, кроме того, площадь под функцией сигнала равна значению спектра на нулевой частоте, а площадь под спектральной функцией равна значению сигнала в нулевой момент времени.

Для восстановления импульсного сигнала по его спектру нужно выполнить обратное преобразование Фурье на интервале частот, в котором сосредоточено, например, 95% энергии сигнала. Полную энергию сигнала можно определить во временной области, как площадь под квадратом временной функции сигнала. Другой путь нахождения энергии сигнала состоит в определении площади под квадратом модуля спектральной функции сигнала, называемой энергетическим спектром. Энергетический спектр показывает распределение энергии сигнала по оси частот и является действительной положительной функцией частоты.

Автокорреляционная функция сигнала измеряется в единицах энергии и косвенно характеризует временной интервал, в котором сосредоточена энергия импульсного сигнала. Значение АКФ в нулевой момент времени равно полной энергии сигнала. Энергетический спектр и АКФ являются

парой функций, связанных преобразованием Фурье. АКФ любого импульсного сигнала является чётной действительной функцией. По энергетическому спектру или АКФ невозможно однозначно восстановить импульсный сигнал, поскольку в энергетическом спектре полностью отсутствует информация о фазовом спектре импульсного сигнала. Вместе с тем энергетические характеристики позволяют определить практически все важные параметры сигнала и его спектра: эффективную длительность и ширину спектра, уровень боковых лепестков, энергию сигнала и т.д.

Контрольные задачи

2.1. Вычислить и изобразить спектры сигналов:

а) $s_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$;

б) $s_2(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$;

в) $s_3(t) = A = \text{const}$;

$$\text{г) } s_4(t) = A \cdot u(t) = \begin{cases} A, & t > 0, \\ 0,5A, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

2.2. Вычислить и изобразить спектр сигнала, показанного на рис. 2.41.

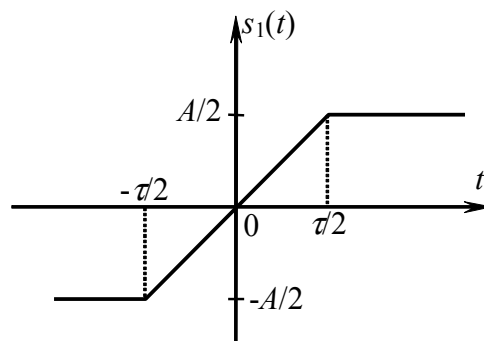


Рис. 2.41. Аналоговый сигнал $s_1(t)$

2.3. Вычислить спектр и построить спектр радиоимпульса

$$s(t) = A \cdot e^{-\alpha|t|} \cdot \cos(2\pi f_0 t).$$

2.4. С помощью свойств преобразования Фурье вычислить спектр $S_2(f)$ и построить графики АС и ФС пары экспоненциальных импульсов $s_2(t)$, представленных на рис. 4.42. Штриховой линией на рис. 4.42 показан одиночный импульс

$$s_0(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t), \quad \alpha > 0.$$

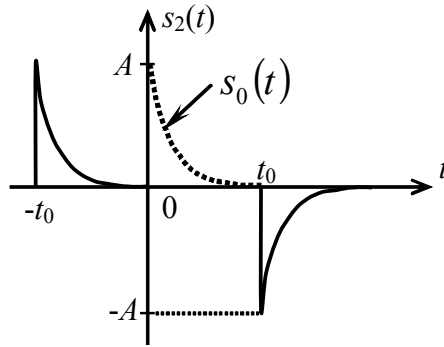


Рис. 4.42. Аналоговый сигнал $s_2(t)$

2.5. Найти и изобразить графически сигнал $s_3(t)$ по известному спектру, показанному на рис. 4.43:

$$S_3(f) = \pi B \cdot e^{-\beta|f|}.$$

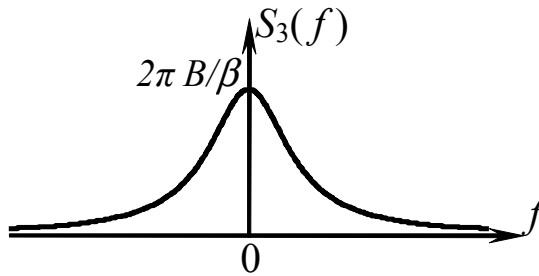


Рис. 4.43. Спектр аналогового сигнала $s_3(t)$

3. АНАЛОГОВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

Периодические сигналы описываются моделями, свойства которых весьма существенно отличаются от свойств моделей, описывающих импульсные сигналы. Главным отличием является бесконечная протяжённость во времени периодически повторяющихся функций:

$$s_T(t) = s_T(t - kT), \quad (3.1)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; T – период сигнала.

Это приводит к существенному изменению спектрального представления сигналов и необходимости введения других временных и частотных характеристик. Рассмотрим особенности описания периодических сигналов на примере наиболее распространённого гармонического (синусоидального) сигнала, изображённого на рис. 3.1:

$$s_T(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t + t_1)\right), \quad (3.2)$$

где A_1 – амплитуда сигнала; f_1 – частота гармоники; $T = 1/f_1$ – период сигнала, φ_1 – начальная фаза гармонического сигнала.

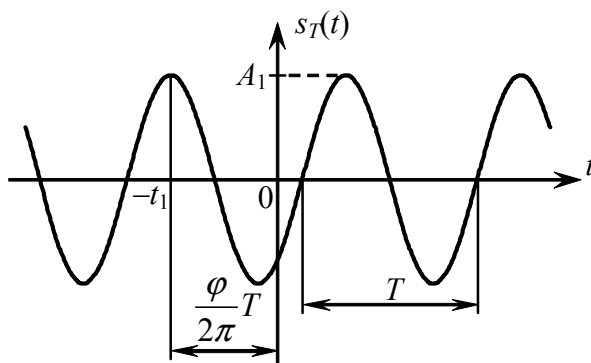


Рис. 3.1. Гармонический сигнал

Гармонический сигнал однозначно задаётся тремя параметрами (амплитуда, частота и начальная фаза), если условиться, что аналитическое выражение сигнала записывается в виде (3.2). С помощью тригонометрических преобразований гармонический сигнал можно представить в квадратурной форме:

$$\begin{aligned} s_T(t) &= A_1 \cos \varphi_1 \cos 2\pi f_1 t - A_1 \sin \varphi_1 \sin 2\pi f_1 t = \\ &= A_C \cos 2\pi f_1 t + A_S \sin 2\pi f_1 t. \end{aligned} \quad (3.3)$$

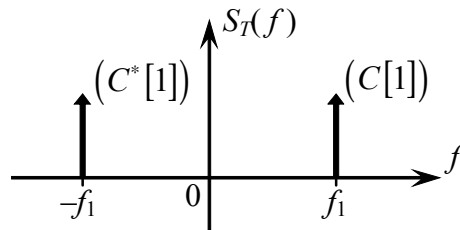


Рис. 3.2. Спектр гармонического сигнала

Спектр гармонического сигнала (3.3) находится известным преобразованием Фурье для косинусоиды и синусоиды, приведённых в таблице спектров сигналов (прил. 1):

$$\begin{aligned} A_C \cos 2\pi f_1 t &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{A_C}{2} (\delta(f + f_1) + \delta(f - f_1)), \\ A_S \sin 2\pi f_1 t &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} j \frac{A_S}{2} (\delta(f + f_1) - \delta(f - f_1)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Суммирование и группировка весов соответствующих δ -функций даст окончательное выражение для спектра гармонического сигнала:

$$\begin{aligned} s_T(t) &= A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \\ &\quad \Downarrow F \\ C^*[1] \delta(f + f_1) + C[1] \delta(f - f_1) &= S_T(f), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $C[1] = \frac{A_C}{2} - j \frac{A_S}{2}$, $C^*[1] = \frac{A_C}{2} + j \frac{A_S}{2}$ – комплексные коэффициенты Фурье для гармонического сигнала.

Спектр гармонического сигнала можно изобразить в виде пары δ -функций, имеющих комплексно сопряжённые веса (рис. 3.2). Более наглядной формой изображения спектра является отображение модулей

$$|C[1]| = \frac{1}{2} \sqrt{A_C^2 + A_S^2} = \frac{A_1}{2} \quad (3.6)$$

и аргументов

$$\arg C[1] = \varphi_1 = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(A_S/A_C), & A_C > 0 \\ -\operatorname{arctg}(A_S/A_C) + \pi, & A_C < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

комплексных коэффициентов Фурье на частотах $\pm f_1$.

Комплексно сопряжённая симметрия коэффициентов Фурье приводит к тому, что $\arg C[1] = -\arg C^*[1]$. На рис. 3.3 приведены комплексные коэффициенты Фурье для гармонического сигнала (3.2). При этом верхний график называется амплитудным спектром (АС), а нижний график фазовым спектром (ФС) гармонического сигнала.

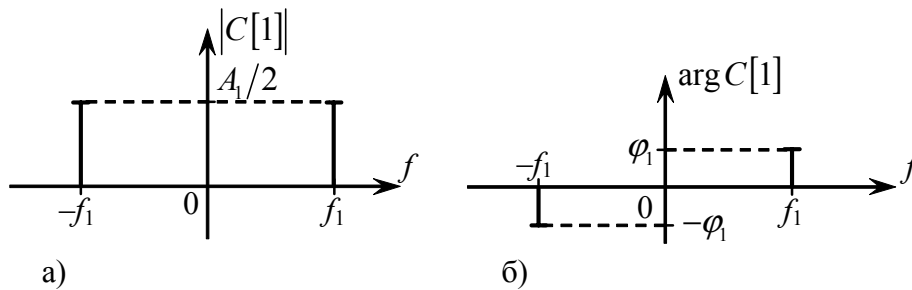


Рис. 3.3. Комплексные коэффициенты Фурье гармонического сигнала:
а – амплитудный спектр; б – фазовый спектр

По спектру гармонического сигнала можно восстановить временную функцию сигнала:

$$s_T(t) = C[1] \cdot e^{j2\pi f_1 t} + C^*[1] \cdot e^{-j2\pi f_1 t} = 2|C[1]| \cdot \cos(2\pi f_1 t + \arg C[1]). \quad (3.8)$$

Любой аналоговый периодический сигнал может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$s_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C[m] \cdot e^{j2\pi m f_1 t} = C[0] + \sum_{m=1}^{\infty} 2|C[m]| \cdot \cos(2\pi m f_1 t + \arg C[m]), \quad (3.9)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $C[m] = C^*[-m] = |C[m]| \cdot \exp\{\arg C[m]\}$ – комплексные коэффициенты ряда Фурье; f_1 – частота первой гармоники; $T = 1/f_1$ – период сигнала.

Коэффициенты ряда Фурье в (3.9) можно вычислить по заданному периодическому сигналу $s_T(t)$ с помощью соотношения

$$C[m] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) \cdot e^{-j2\pi m f_1 t} dt. \quad (3.10)$$

По аналогии с (3.5) можно определить спектр периодического сигнала в виде суммы δ -функций по частоте с весами, равными соответствующим комплексным коэффициентам ряда Фурье:

$$S_T(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), \quad (3.11)$$

Более наглядной формой изображения спектра является отображение модулей $|C[m]|$ и аргументов $\arg C[m]$ комплексных коэффициентов Фурье на частотах $m f_1$ для $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ по аналогии с рис 3.3 в виде амплитудного и фазового спектров.

Периодические сигналы можно получить из импульсных аналоговых сигналов $s(t)$, рассмотренных в разд. 2. Для этого необходимо просуммировать задержанные копии импульсного сигнала через равные интервалы времени:

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT) = s(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad \text{В}, \quad (3.12)$$

где «*» – операция линейной свёртки; T – период повторения сигнала.

Использование операции свёртки при записи выражения для периодического сигнала основано на свойстве δ -функции:

$$s(t - T_1) = s(t) * \delta(t - T_1), \quad (3.13)$$

которая в результате свёртки с любой другой функцией сдвигает эту функцию по оси аргумента вправо на величину T_1 .

Импульсный сигнал $s(t)$ может быть задан как сигнал конечной или бесконечной длительности. Поэтому в некоторых случаях периодический сигнал $s_T(t)$ может быть результатом суммирования перекрывающихся во времени функций, что приведёт к изменению формы сигнала в пределах одного периода $s_T(t) \neq s(t)$ для $0 \leq t \leq T$.

Согласно свойству преобразования Фурье для свёртки (свойство 14 прил. 2)

$$x(t) * y(t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(f) \cdot Y(f), \quad (3.14)$$

спектр периодического сигнала может быть найден как произведение спектра $S(f)$ исходного аналогового сигнала и преобразования Фурье от периодической последовательности δ -функций:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right). \quad (3.15)$$

Таким образом, спектр аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ определяется прямым преобразованием Фурье временной функции периодического сигнала, а значит для него справедливы все теоремы о свойствах преобразования Фурье, в том числе и свойство свёртки сигналов во времени:

$$\begin{aligned} S_T(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) e^{-j2\pi ft} dt = S(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{m}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), \text{ В.с,} \end{aligned} \quad (3.16)$$

где комплексные веса δ -функций на частотах, кратных $1/T$, представляющие собой коэффициенты разложения периодического сигнала в ряд Фурье, определяющиеся выражением

$$C[m] = \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{m}{T}\right), \text{ В.} \quad (3.17)$$

Главной особенностью такого представления спектра периодического сигнала является определение коэффициентов Фурье через известный спектр импульсного сигнала путём взятия его отсчётов в соответствии с (3.17).

Таким образом, основными характеристиками аналогового периодического сигнала являются временная $s_T(t)$ и спектральная $C[m]$ функции сигнала, связанные между собой комплексным рядом Фурье (*Fourier Series – FS*):

$$s_T(t) \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} C[m]. \quad (3.18)$$

Для сравнения периодических сигналов друг с другом используются параметры сигналов и спектров. Основными параметрами аналогового периодического сигнала является его *средняя мощность* P_{cp} и *ширина спектра* F_M . Под средней мощностью сигнала $s_T(t)$ понимается площадь под квадратом временной функции сигнала в пределах периода T , отнесённая к этому периоду:

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t) dt, \text{ В}^2. \quad (3.19)$$

Согласно теореме Парсеваля для периодических сигналов среднюю мощность можно определить и с помощью коэффициентов ряда Фурье:

$$P_{cp} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C[m] \cdot C^*[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C[m]|^2, \text{ В}^2. \quad (3.20)$$

Если задаться долей средней мощности в пределах ширины спектра

$$D = \frac{P_D(M)}{P_{\text{cp}}} \cdot 100\%, \quad (3.21)$$

то ширину спектра $F_M = M/T$ можно косвенно определить из соотношения

$$P_D(M) \cong \sum_{m=-M}^M |C[m]|^2. \quad (3.22)$$

При определении ширины спектра удобно пользоваться графиком части средней мощности $P_D(m)$ сигнала в полосе F_m в зависимости от количества учитываемых гармоник m . На рис. 3.4 показан пример такой зависимости.

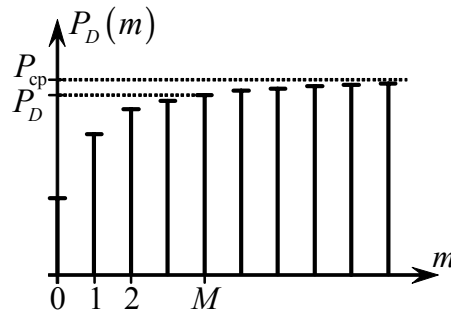


Рис. 3.4. Зависимость части средней мощности от числа учитываемых гармоник

Восстановление сигнала $s_T(t)$ по известным коэффициентам Фурье $C[m]$ в ограниченной полосе частот F_M даёт аппроксимацию сигнала $\hat{s}_T(t)$ по M гармоникам ряда Фурье:

$$\hat{s}_T(t) = \sum_{m=-M}^M C[m] \cdot e^{j2\pi m f_1 t} = C[0] + \sum_{m=1}^M 2|C[m]| \cdot \cos(2\pi m f_1 t + \arg C[m]). \quad (3.23)$$

Отличие аппроксимации сигнала $\hat{s}_T(t)$ от исходного сигнала $s_T(t)$ можно определить по величине средней мощности разности сигналов:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s_T(t) - \hat{s}_T(t)]^2 dt, \quad (3.24)$$

используемой в качестве меры точности восстановления сигнала.

В том случае, когда периодический сигнал имеет постоянную составляющую $C[0]$, для оценки точности восстановления формы сигнала и ширины спектра необходимо вычесть мощность постоянной составляющей $P_0 = C^2[0]$ из средней мощности в выражениях (3.19), (3.20) и (3.22). Это приведёт к более точной оценке влияния высокочастотных гармоник на форму восстанавливаемого периодического сигнала.

Помимо временной и спектральной функций в качестве характеристик периодических сигналов используют также автокорреляционную функцию $R_T(t)$ и спектр мощности $P[m]$.

Автокорреляционная функция (АКФ) аналогового периодического сигнала может быть найдена следующим образом во временной области:

$$R_T(t) = \frac{1}{T} \cdot s_T(t) \otimes s_T(-t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s_T(\tau) \cdot s_T(\tau-t) d\tau, \text{ В}^2, \quad (3.25)$$

где « \otimes » – операция круговой свёртки.

АКФ $R_T(t)$ периодического сигнала является также периодической функцией, значение АКФ при $t = 0$ равно средней мощности сигнала:

$$R_T(0) = P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t) dt. \quad (3.26)$$

Операции круговой свёртки двух периодических функций с одинаковыми периодами соответствует произведение их коэффициентов Фурье с весовым коэффициентом T :

$$x_T(t) \otimes y_T(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(\tau) \cdot y_T(t-\tau) d\tau \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} T \cdot X[m] \cdot Y[m]. \quad (3.27)$$

Отсчёты спектра мощности $P[m]$ аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ являются коэффициентами ряда Фурье для АКФ $R_T(t)$

$$R_T(t) \stackrel{FS}{\Leftrightarrow} P[m] \quad (3.28)$$

и связаны с энергетическим спектром $W_s(f)$ исходного импульсного сигнала $s(t)$ следующими соотношениями (выражения (3.10), (3.17), (3.25) и (2.26)):

$$P[m] = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} R_T(t) \cdot e^{-j2\pi m \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \cdot T \cdot C[m] \cdot C^*[m] = \frac{1}{T^2} \cdot W_s\left(\frac{m}{T}\right), \text{ В}^2. \quad (3.29)$$

По аналогии с (3.16) спектр мощности $P_T(f)$ периодического сигнала может быть определён в виде суммы δ -функций по частоте с весами, равными отсчётам мощности $P[m]$ соответствующих гармоник:

$$P_T(f) = \frac{1}{T^2} \cdot W_s(f) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), \text{ В}^2 \cdot \text{с}. \quad (3.30)$$

Связь между АКФ $R_s(t)$ аналогового импульсного сигнала $s(t)$ и АКФ $R_T(t)$ периодического сигнала $s_T(t)$ может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье от выражения (3.30):

$$R_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(f) \cdot e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{T^2} \cdot R_s(t) * T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_s(t - kT). \quad (3.31)$$

Поскольку длительность АКФ $R_s(t)$ импульсного сигнала конечной длительности в два раза больше длительности самого сигнала, это может привести к перекрытию АКФ $R_s(t)$ в течение одного периода даже в том случае, когда исходный сигнал $s(t)$ при его периодическом повторении не перекрывался.

По известным отсчётам спектра мощности $P[m]$ аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ можно определить его АКФ с помощью ряда Фурье:

$$R_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P[m] \cdot e^{j2\pi m \frac{t}{T}}. \quad (3.32)$$

Определим характеристики мощности гармонического сигнала (3.2). Автокорреляционная функция гармонического сигнала находится с помощью операции круговой свёртки:

$$\begin{aligned} R_T(t) &= \frac{1}{T} \cdot s_T(t) \otimes s_T(-t) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}(\tau + t_1)\right) \cdot A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}(\tau - t + t_1)\right) d\tau = \\ &= \frac{A_1^2}{2T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \int_{-T/2}^{T/2} d\tau + \frac{A_1^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}(2\tau - t + 2t_1)\right) d\tau = \\ &= \frac{A_1^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

АКФ гармонического сигнала изображена на рис. 3.5. Следует отметить, что АКФ является гармонической функцией, не зависит от начальной фазы исходного гармонического сигнала и имеет амплитуду, равную средней мощности синусоиды:

$$R_T(0) = P_{\text{ср}} = \frac{A_1^2}{2}, \text{ В}^2. \quad (3.34)$$

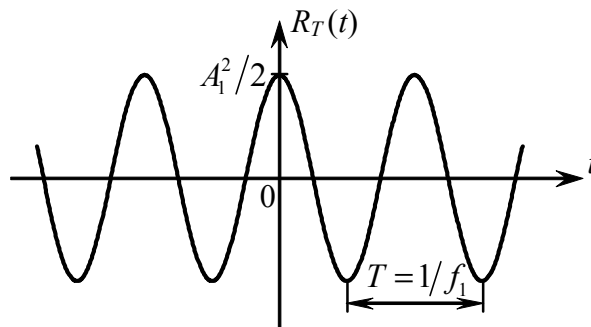


Рис. 3.5. АКФ гармонического сигнала

Отсчёты спектра мощности $P[m]$ гармонического сигнала связаны с комплексными коэффициентами Фурье $C[m]$ соотношением (3.29):

$$P[m] = C[m] \cdot C^*[m] = A_1^2/4, \quad m = \pm 1. \quad (3.35)$$

Связь между временными функциями аналоговых импульсных и периодических сигналов, их спектрами, автокорреляционными функциями, а также между энергетическими спектрами и спектрами мощности показана на рис. 3.6.

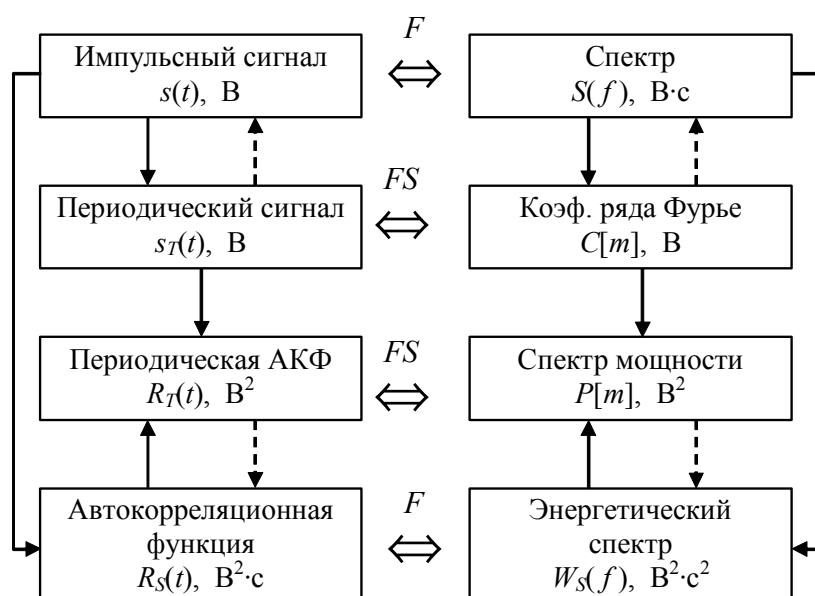


Рис. 3.6. Взаимосвязь характеристик импульсных и периодических аналоговых сигналов

Пунктирными линиями на рис. 3.6 показаны способы приближённой аппроксимации временных и частотных функций. Точность восстановления характеристик импульсного сигнала по известным характеристикам периодического сигнала зависит от перекрытия одиночных импульсов при их периодическом повторении.

Пример 3.1

Рассмотрим процедуру нахождения временных и частотных характеристик последовательности прямоугольных импульсов $s_T(t)$ длительностью $\tau = 1$ мкс, периодом повторения $T = 5$ мкс и амплитудой $A = 2$ В, показанной на рис. 3.7.

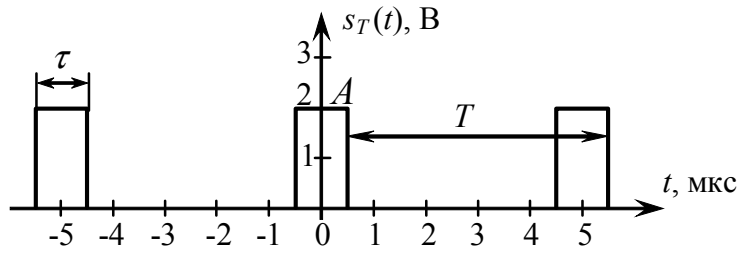


Рис. 3.7. Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$

Сквозность периодического сигнала $s_T(t)$ равна

$$q = T/\tau = 5. \quad (3.36)$$

Постоянная составляющая периодического сигнала $s_T(t)$ определяется как средняя за период площадь сигнала:

$$C[0] = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s_T(t) dt = \frac{A \cdot \tau}{T} = 0,4 \text{ В}. \quad (3.37)$$

Найдем разложение сигнала $s_T(t)$ в ряд Фурье по комплексным коэффициентам $C[m]$

$$\begin{aligned} C[m] &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot e^{-j2\pi m t} dt = \frac{A}{-j2\pi m} \cdot e^{-j2\pi m t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{A}{\pi m} \cdot \left[\frac{e^{-j\pi m \frac{\tau}{T}} - e^{j\pi m \frac{\tau}{T}}}{-2j} \right] = \frac{A}{\pi m} \cdot \sin\left(\pi m \frac{\tau}{T}\right) = \\ &= \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\sin\left(\pi m \frac{\tau}{T}\right)}{\pi m \frac{\tau}{T}} = \frac{A}{q} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi m}{q}\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Модуль и аргумент комплексных коэффициентов ряда Фурье сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 3.8.

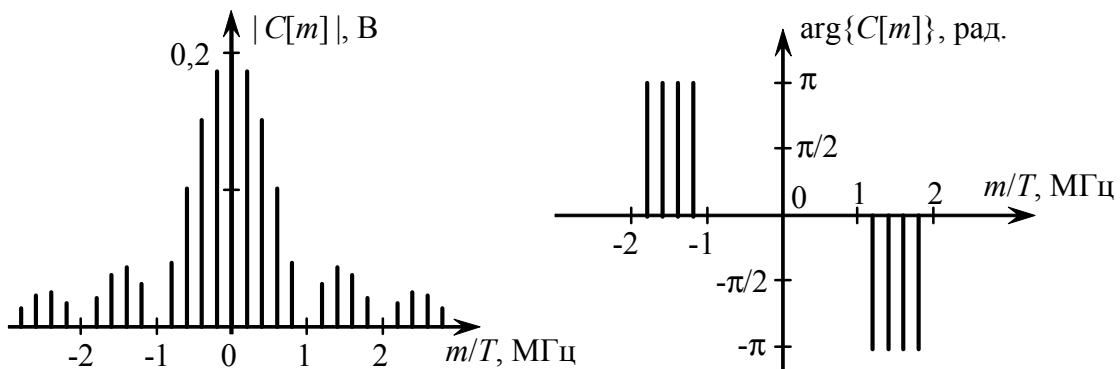


Рис. 3.8. Амплитудный и фазовый спектры аналогового периодического сигнала

Проведем анализ полученных графиков.

Исходный сигнал, показанный на рис. 3.7, обладает свойством чётной симметрии:

$$s_T(t) = s_T(-t), \quad (3.39)$$

следовательно, спектр этого сигнала должен обладать следующими особенностями:

$$\operatorname{Re}\{C[m]\} \neq 0, \quad \operatorname{Im}\{C[m]\} \equiv 0, \quad (3.40)$$

т.е. спектр должен быть чисто действительным, что видно из рис. 3.8.

Для периодической последовательности прямоугольных импульсов $s_T(t)$ справедливо свойство площади преобразования Фурье:

$$s_T(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C[m] = A = 2 \text{ В}. \quad (3.41)$$

Полезно отметить, что в пределах главного лепестка (в полосе частот от нуля до 1 МГц) функции «sinc» расположено ровно $q = 5$ гармоник с частотами, кратными частоте $F = 1/T$ периодического сигнала.

Автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ может быть найдена с помощью периодического повторения АКФ импульсного сигнала (2.23) в соответствии с формулой (3.31), а спектр мощности – с помощью выражения (3.29) и коэффициентов ряда Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов (3.25):

$$P[m] = C[m] \cdot C^*[m] = \left(\frac{A}{q}\right)^2 \cdot \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi m}{q}\right). \quad (3.42)$$

АКФ и спектр мощности сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 3.9 и 3.10 соответственно.

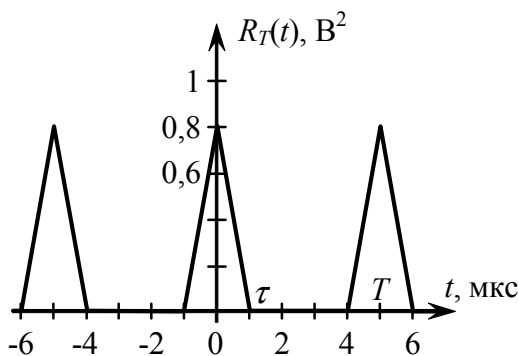


Рис. 3.9. АКФ сигнала $s_T(t)$

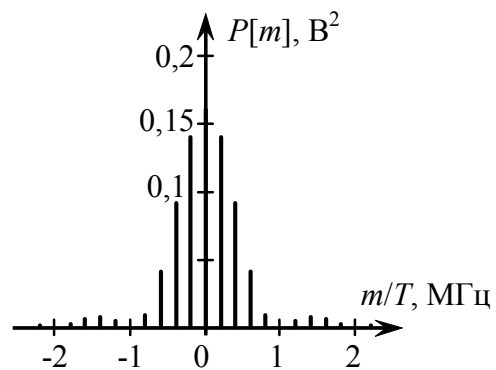


Рис. 3.10. Спектр мощности $P[m]$

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и спектра мощности сигнала $s_T(t)$ воспользуемся теоремой Парсеваля для периодических сигналов и свойством площади для АКФ периодического сигнала:

$$P_{cp} = R_T(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P[m] = 0,8 \text{ В}^2; \quad (3.43)$$

$$P[0] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_T(t) dt = \frac{A^2\tau}{T} = 0,16 \text{ В}^2, \quad (3.44)$$

где P_{cp} – средняя мощность сигнала $s_T(t)$.

Для определения ширины спектра последовательности прямоугольных импульсов построим график зависимости суммарной мощности m первых гармоник (без учёта мощности постоянной составляющей) $P'_D(m)$, представленный на рис. 3.11. Задаваясь процентом мощности D' в пределах ширины спектра

$$D' \leq \frac{P'_D(M)}{P_{cp} - P[0]} \cdot 100\%, \quad (3.45)$$

можно по графику рис 3.11 определить число гармоник M , включающих в себя не меньше заданной доли средней мощности сигнала без учёта мощности постоянной составляющей.

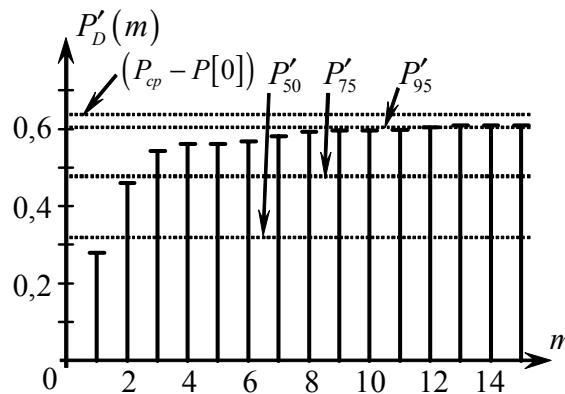


Рис. 3.11. Зависимость части средней мощности от числа учитываемых гармоник периодического сигнала $s_T(t)$

Таким образом, первые две гармоники содержат не менее 50% средней мощности сигнала, первые три гармоники – не менее 75 %, а первые тринадцать гармоник – не менее 95 % средней мощности сигнала без учёта его постоянной составляющей. Восстановить последовательность прямоугольных импульсов можно с помощью выражения (3.23) для

требуемого количества гармоник. На рис. 3.12 представлены сигналы, восстановленные по первым двум, трём и тринадцати гармоникам.

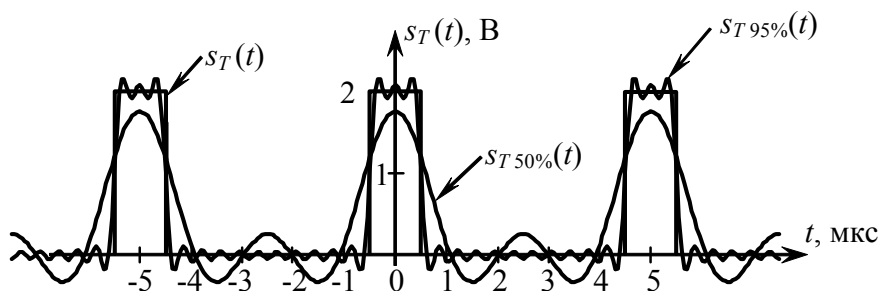


Рис. 3.12. Восстановление периодического сигнала $s_T(t)$

Сравнение восстановленных сигналов между собой и с исходным сигналом показывает, что точность восстановления, оцениваемая мощностью разностного сигнала (3.24), улучшается с увеличением числа учитываемых гармоник. Вместе с тем даже при очень большом числе гармоник в восстановленном сигнале наблюдаются выбросы вблизи скачков сигнала, объясняемые эффектом Гиббса. Причём интересно отметить, что величина выброса не уменьшается с ростом числа учитываемых гармоник, хотя средняя мощность разностного сигнала стремится к нулю.

Пример 3.2

Рассмотрим процедуру нахождения временных и частотных характеристик аналогового периодического сигнала $s_T(t)$, полученного из экспоненциального импульсного сигнала $s(t)$ (2.29) путем суммирования его сдвинутых во времени копий в соответствии с выражением (3.12). Период повторения импульсов выбран $T = 2$ мкс. Периодический сигнал $s_T(t)$ показан на рис. 3.13.

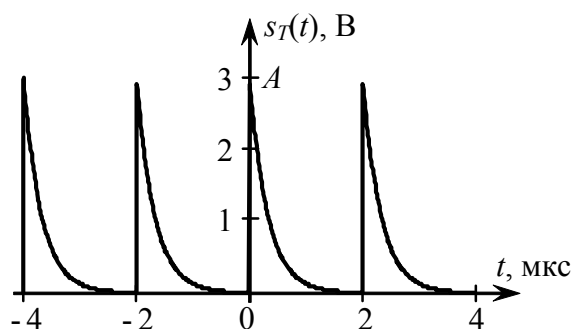


Рис. 3.13. Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$

Непосредственное использование формулы для коэффициентов ряда Фурье (3.10) в этом случае затруднительно, поскольку сигнал $s_T(t)$ в пределах периода не может в принципе совпадать с импульсом $s(t)$.

Нахождение аналитического выражения для $s_T(t)$ в замкнутой явной форме получить довольно сложно. Это объясняется наложением сигналов при суммировании по формуле (3.12). Коэффициенты ряда Фурье сигнала $s_T(t)$ в этом случае могут быть найдены с помощью выражений (2.31) и (3.17):

$$C[m] = \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{\frac{j2\pi m}{T} + \alpha} = \frac{A}{j2\pi m + \alpha T}. \quad (3.46)$$

Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала, представляющие собой модуль и аргумент комплексных коэффициентов ряда Фурье (3.46), изображены на рис. 3.14.

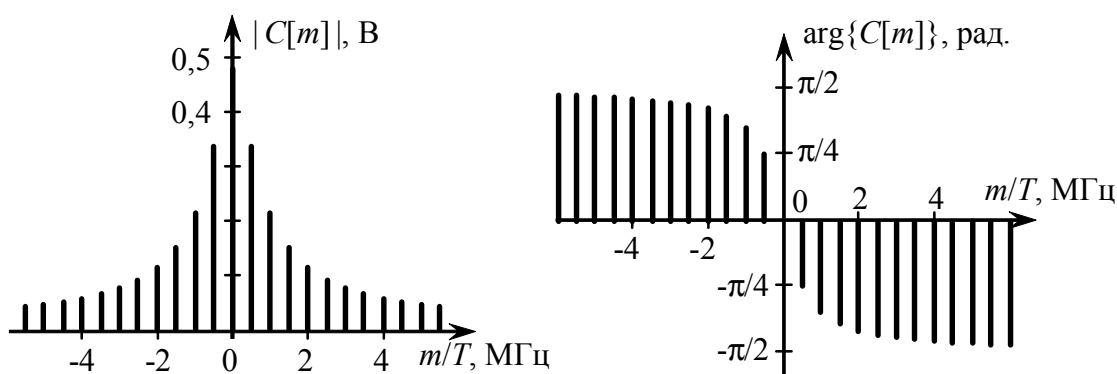


Рис. 3.14. Амплитудный и фазовый спектры аналогового периодического сигнала

Для аналогового периодического сигнала справедливы свойства площади преобразования Фурье:

$$C[0] = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(t) dt = \frac{A}{\alpha T} \approx 0,48 \text{ В}; \quad (3.47)$$

$$s_T(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C[m] = A = 3 \text{ В}. \quad (3.48)$$

Автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ может быть найдена с помощью периодического повторения АКФ импульсного сигнала (2.72) в соответствии с формулой (3.31):

$$R_T(t) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_S(t - kT) = R_S(t) = \frac{A^2}{2\alpha T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t-kT|}, \quad (3.49)$$

а спектр мощности – с помощью выражения (3.29) и энергетического спектра импульсного сигнала (2.73):

$$P[m] = \frac{1}{T^2} \cdot W_s \left(\frac{m}{T} \right) = \frac{A^2}{(\alpha T)^2 + (2\pi m)^2}. \quad (3.50)$$

АКФ и спектр мощности сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 3.15 и 3.16 соответственно.

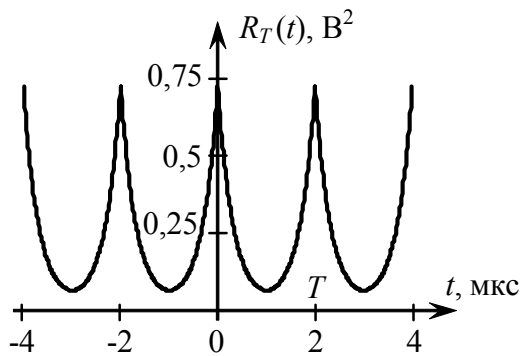


Рис. 3.15. АКФ сигнала $s_T(t)$

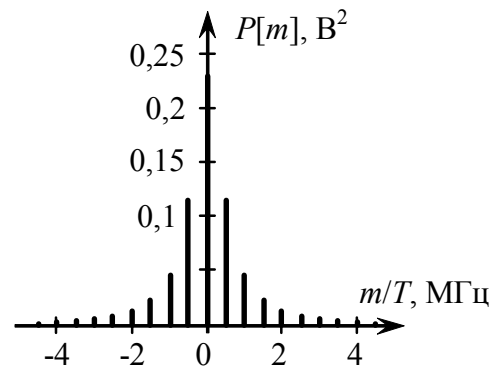


Рис. 3.16. Спектр мощности $P[m]$

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и спектра мощности сигнала $s_T(t)$ воспользуемся теоремой Парсеваля для периодических сигналов и свойством площади для АКФ периодического сигнала:

$$P_{\text{cp}} = R_T(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P[m] \approx 0,72 \text{ В}^2; \quad (3.51)$$

$$P[0] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_T(t) dt \approx 0,23 \text{ В}^2, \quad (3.52)$$

где P_{cp} – средняя мощность сигнала $s_T(t)$.

Определим ширину спектра данного экспоненциального периодического сигнала. Периодический сигнал имеет постоянную составляющую $S[0]$, поэтому методика нахождения ширины спектра аналогична примеру 3.1. Сначала строим график зависимости мощности, содержащейся в первых m гармониках сигнала, без учёта мощности постоянной составляющей (рис. 3.17). Задавшись уровнями D' в соответствии с выражением (3.45), определим по графику рис. 3.17 число гармоник, обеспечивающих заданные уровни мощности.

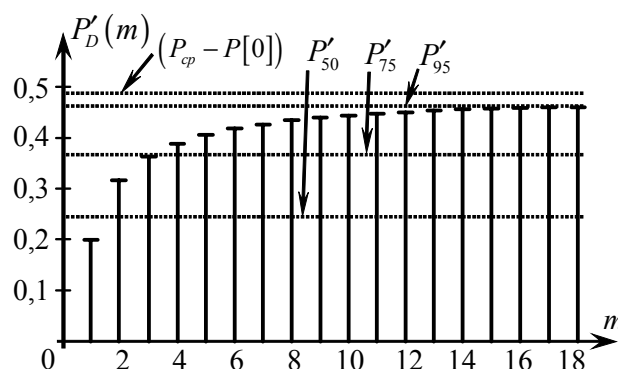


Рис.3.17. Зависимость части средней мощности от числа учитываемых гармоник периодического сигнала $s_T(t)$

Так, первые две гармоники содержат не менее 50% мощности, первые четыре гармоники включают не менее 75% мощности, а чтобы учесть 95% мощности, необходимо использовать как минимум 18 первых гармоник периодического сигнала.

Результаты восстановления экспоненциального периодического сигнала $s_T(t)$ по первым двум гармоникам и по 18 гармоникам без учёта постоянной составляющей по формуле (3.23) показаны на рис. 3.18.

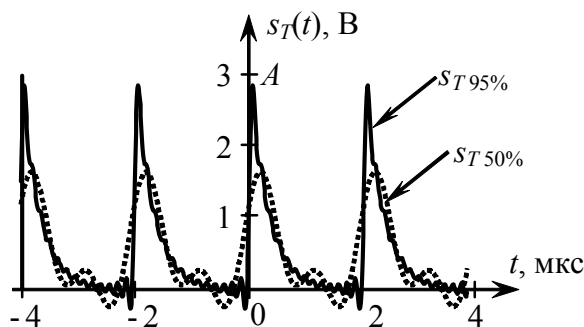


Рис. 3.18. Восстановление периодического сигнала $s_T(t)$

Совершенно очевидно, что с увеличением числа учитываемых гармоник восстановленный сигнал приближается к исходному сигналу в среднеквадратическом смысле. Это означает, что средняя мощность разностного сигнала (3.24) уменьшается. Вместе с тем и в данном примере проявляется эффект Гиббса, наблюдавшийся при восстановлении последовательности прямоугольных импульсов в примере 3.1. Он хорошо виден слева от каждого скачка периодического сигнала при переходе от плоской части сигнала к вертикальному скачку. Выброс в восстановленном сигнале проявляется только перед скачком.

Выводы по разделу

Аналоговые периодические сигналы, обладающие конечной средней мощностью, получаются из импульсных аналоговых сигналов с ограниченной энергией путём их периодического повторения с последующим суммированием. Это может привести к существенному изменению формы сигнала в пределах периода, если эффективная длительность импульсного сигнала больше, чем выбранный период повторения. Спектральным представлением периодического сигнала является совокупность комплексных коэффициентов ряда Фурье, изображаемая в виде амплитудного и фазового спектров. Эти спектры можно определить путём прямого интегрирования временной функции периодического сигнала в пределах одного периода. Значительно удобнее определять спектр периодического сигнала по известному спектру импульсного аналогового сигнала, образующего заданный периодический сигнал. В этом случае спектр определяется как последовательность отсчётов (значений функции в определённых точках) спектра импульсного сигнала, поделённых на период сигнала. Таким образом, огибающая спектра периодического сигнала по форме совпадает со спектром импульсного сигнала. Спектральный анализ функции периодического сигнала в общем случае описывается суммой равноотстоящих по частоте δ -функций с комплексными площадями, представляющими собой коэффициенты ряда Фурье периодического сигнала. Для графического изображения спектра периодического сигнала принято строить два графика, отображающих модули и аргументы комплексных коэффициентов Фурье. При этом вместо δ -функций отображают их площади в виде линий соответствующей длины в зависимости от номера или значения гармоники. Если периодический сигнал обладает чётной симметрией, его спектр описывается действительной чётной функцией. Нечётный периодический сигнал имеет мнимый нечётный спектр. Сигнал, обладающий нечётно-гармонической симметрией, содержит только нечётные гармоники. Для периодических сигналов справедливо свойство площади: площадь под функцией сигнала в пределах периода, поделённая на период, равна значению постоянной составляющей сигнала (нулевая гармоника), а сумма всех комплексных коэффициентов Фурье сигнала равна значению сигнала в нулевой момент времени.

Для восстановления периодического сигнала по его спектру нужно вычислить ряд Фурье, включающий те гармоники, в которых сосредоточено

порядка 95% средней мощности сигнала без учёта мощности постоянной составляющей. Полную среднюю мощность сигнала можно определить во временной области, как площадь под квадратом временной функции сигнала, поделённую на период сигнала. Другой путь нахождения средней мощности сигнала состоит в определении суммы квадратов модулей коэффициентов ряда Фурье, образующих спектр мощности периодического сигнала. Спектр мощности показывает распределение мощности сигнала по гармоникам и является действительной положительной функцией частоты.

Автокорреляционная функция периодического сигнала является периодической функцией с тем же периодом, что и сам сигнал, она измеряется в единицах мощности. Значение АКФ в нулевой момент времени равно полной средней мощности сигнала. Спектр мощности и АКФ являются парой функций, связанных разложением в ряд Фурье. АКФ любого периодического сигнала является чётной действительной периодической функцией. По спектру мощности или АКФ невозможно однозначно восстановить периодический сигнал, поскольку в спектре мощности полностью отсутствует информация о фазовом спектре периодического сигнала. Вместе с тем характеристики мощности позволяют определить практически все важные параметры сигнала и его спектра – эффективную длительность и ширину спектра, уровень боковых лепестков, среднюю мощность сигнала и т.д.

Контрольные задачи

3.1. Вычислить спектры сигналов $s_1(t) \div s_4(t)$ и построить графики сигналов во времени и соответствующие им спектральные диаграммы в частотной области:

- а) $s_1(t) = A_0 + A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$; в) $s_1(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + A_2 \cdot \sin(4\pi f_0 t)$;
 б) $s_1(t) = A_0 + A \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$; г) $s_1(t) = A_0 + A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(4\pi f_0 t)$.

3.2. Вывести выражение для расчета постоянной составляющей и коэффициентов разложения в комплексную форму ряда Фурье последовательности разнополярных импульсов $s_T(t)$, показанной на рис. 3.19, построить их.

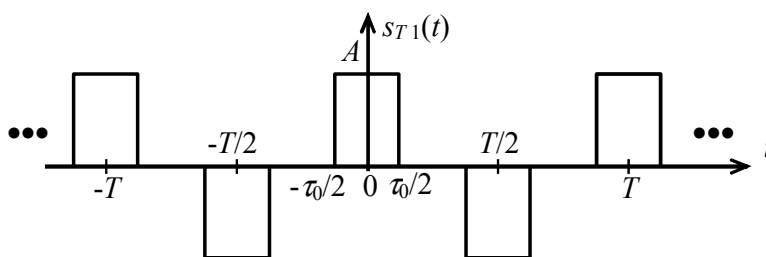


Рис. 3.19. Последовательность разнополярных импульсов $s_{T1}(t)$

3.3. Найти постоянную составляющую и амплитуду первой гармоники периодического сигнала $s_{T2}(t)$, изображенного на рис. 3.20.

$$s_2(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t), \quad -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \quad \tau = T/2 = 1/2 f_0.$$

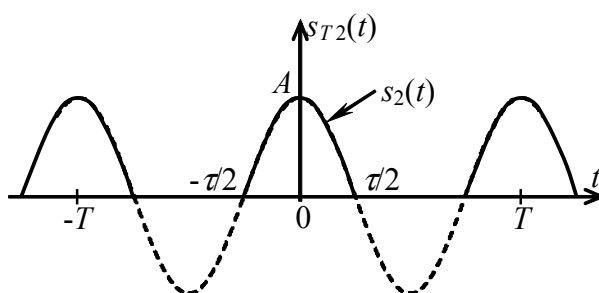


Рис. 3.20. Периодический сигнал $s_T(t)$

3.4. Определить постоянную составляющую и коэффициенты разложения в комплексный ряд Фурье последовательности униполярных треугольных импульсов $s_{T3}(t)$, показанной на рис. 3.21.

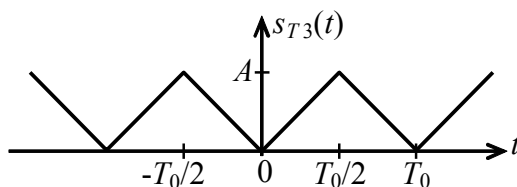


Рис. 3.21. Последовательность треугольных импульсов $s_T(t)$

4. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Линейные цепи или линейные системы служат для преобразования сигналов, подаваемых на их входы. Это означает, что характеристики и параметры сигналов на выходах линейных систем отличаются от соответствующих характеристик входных сигналов. Линейные системы в основном используются для фильтрации сигналов, заключающейся в целенаправленном изменении спектральных характеристик входного сигнала. Все возможные типы фильтров по своему функциональному назначению делятся на четыре группы, идеальные (желаемые) частотные характеристики которых представлены на рис. 4.1.

Фильтр нижних частот (ФНЧ) предназначен для выделения и усиления в K_0 раз составляющих спектра входного сигнала в области частот от нуля до заданной граничной частоты $f_{гр}$ (рис. 4.1, а). Фильтр верхних частот (ФВЧ) используется для подавления (задержания) компонент сигнала в области частот от нуля до заданной граничной частоты $f_{гр}$ с одновременным усилением в K_0 раз компонент сигнала в области верхних частот (рис. 4.1, б). Полосно-пропускающий фильтр (ППФ) усиливает сигнал в полосе частот ΔF вблизи центральной частоты f_0 от граничной частоты f_n до граничной частоты f_v и подавляет все остальные частоты в спектре входного сигнала (рис. 4.1, в). Полосно-задерживающий фильтр (ПЗФ) подавляет компоненты сигнала в области частот ΔF вблизи центральной частоты f_0 и усиливает все остальные частоты во входном спектре (рис. 4.1, г).

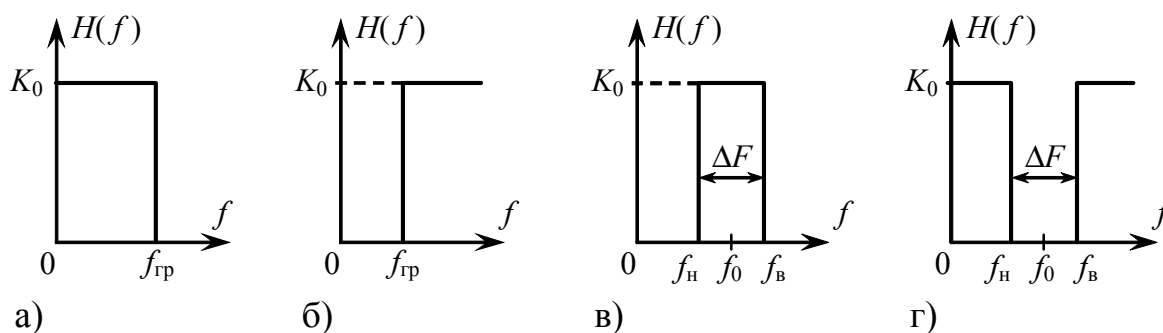


Рис. 4.1. Характеристики идеальных фильтров:

а – фильтр нижних частот; б – фильтр верхних частот; в – полосно-пропускающий фильтр; г – полосно-задерживающий фильтр

Физически реализуемые фильтры, выполненные в виде линейных цепей, содержащих элементы сопротивления, ёмкости и индуктивности, не могут иметь таких «столообразных» частотных характеристик, как у идеальных фильтров. Частотные характеристики реальных фильтров описываются дробно-рациональными функциями, представляющими собой отношение полиномов по степеням $p = j2\pi f$. Задача анализа линейных цепей сводится к нахождению частотной характеристики заданной линейной цепи и определению её параметров, т.е. полосы пропускания и коэффициента усиления. Линейная цепь может задаваться своей схемой или диаграммой особых точек, представляющих собой нули и полюса системной функции. Нули являются корнями полинома числителя частотной характеристики линейной цепи, а полюса являются корнями полинома знаменателя. Эти два представления линейных цепей являются эквивалентными по отношению к частотной характеристике, но одной и той же диаграмме нулей и полюсов может соответствовать множество различных схем линейных цепей.

Преобразования сигналов в линейных цепях сопровождаются нежелательными (искажающими) эффектами, проявляющимися во временной области. Например, прохождение прямоугольного импульса $S_{вх}(t)$ через линейную цепь (рис. 4.2) может сопровождаться задержкой τ_3 и выбросом S_{\max} переднего фронта, колебаниями T_k выходного сигнала во время действия $t < T_u$ и после окончания входного импульса и т.д.

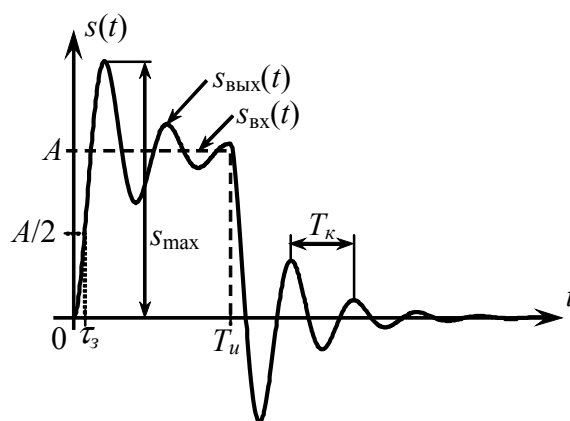


Рис. 4.2. Искажение прямоугольного импульса на выходе линейной цепи

Анализ временных искажений при прохождении сигнала через линейную цепь удобнее проводить с помощью временной характеристики линейной цепи, называемой импульсной характеристикой. Она связана с частотной характеристикой обратным преобразованием Фурье, в точности как временная функция сигнала связана со спектральной функцией сигнала (см. (2.19)). Импульсную характеристику следует рассматривать как реакцию линейной системы на воздействие в виде δ -функции.

Следует особо подчеркнуть, что временной и частотный анализ преобразования сигналов при прохождении через линейные цепи дают абсолютно одинаковые результаты, поскольку сигнал на выходе цепи связан с выходным спектром преобразованием Фурье. Но сложность проведения анализа во временной и частотной областях в каждом конкретном случае существенно отличается. К тому же строгое преобразование Фурье в аналитическом виде представляет собой довольно сложную задачу. Поэтому нельзя заранее для любой задачи отдать предпочтение временному или частотному методу анализа. Нахождение временных и частотных характеристик линейных систем даёт возможность более наглядного отображения свойств анализируемой цепи во временной и частотной областях.

Когда требуется провести энергетический расчёт линейной системы, заключающийся в определении автокорреляционной функции или энергетического спектра выходного импульсного сигнала, находят энергетические характеристики линейной цепи. Эти характеристики также могут быть определены как во временной, так и в частотной области. Временной характеристикой является АКФ импульсной характеристики, а в

частотной области используется энергетическая характеристика, связанная преобразованием Фурье с АКФ импульсной характеристики линейной цепи.

В случае периодического сигнала частотные и временные характеристики линейной цепи имеют определённую специфику, характеризующуюся особенностями спектра и временного характера входного сигнала. Поскольку спектр периодического сигнала представляет собой сумму δ -функций по частоте (3.16), положение которых определяется частотами гармоник периодического сигнала, для определения спектра выходного сигнала достаточно знать только отсчёты частотной характеристики линейной системы на частотах гармоник входного сигнала. Следовательно, частотную характеристику линейной цепи, предназначенную для анализа прохождения периодических сигналов, можно рассматривать в виде дискретной частотной характеристики, имеющей вид суммы δ -функций с весами, равными отсчётам частотной характеристики цепи.

При анализе периодических сигналов вводится периодическая импульсная характеристика, являющаяся суммой задержанных по времени копий импульсной характеристики. Такая замена позволяет воспользоваться операцией круговой (циклической) свёртки при нахождении периодического выходного сигнала линейной цепи. Кроме того, периодическая импульсная характеристика разлагается в ряд Фурье с комплексными коэффициентами, равными отсчётам частотной характеристики, взятых на частотах гармоник входного сигнала. Аналогично вводятся частотная характеристика по мощности и АКФ периодической импульсной характеристики, используемые для определения характеристик мощности периодических сигналов на выходе линейной системы.

4.1. Импульсные и частотные характеристики линейных цепей

Линейная цепь может быть описана своей *импульсной характеристикой*. Импульсной характеристикой $h(t)$ называется реакция линейной цепи на сигнал в виде дельта-функции $\delta(t)$. Преобразование Лапласа от импульсной характеристики даёт *системную передаточную функцию*:

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (4.1)$$

Системная передаточная функция $H(p)$ является дробно-рациональной функцией комплексной частоты $p = \sigma + j2\pi f$:

$$H(p) = H_0 \cdot \frac{p^M + b_{M-1}p^{M-1} + \dots + b_0}{p^N + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_0} =$$

$$= H_0 \cdot \frac{(p - p_{z1}) \cdots (p - p_{zM})}{(p - p_{p1}) \cdots (p - p_{pN})} = H_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^M (p - p_{zi})}{\prod_{n=1}^N (p - p_{pn})}, \quad (4.2)$$

где N – порядок линейной системы; p_{zi} – нули и p_{pn} – полюса линейной системы.

Физически реализуемые системы имеют порядок $N \geq M$. Обратное преобразование Лапласа от системной передаточной функции $H(p)$ позволяет получить импульсную характеристику линейной цепи в виде

$$h(t) = \sum_{n=1}^N B_n \cdot e^{p_{pn}t} \cdot u(t), \quad (4.3)$$

где B_n – вычет n -го однократного полюса p_{pn} определяется следующим образом:

$$B_n = H(p)(p - p_{pn}) \Big|_{p=p_{pn}}. \quad (4.4)$$

Согласно выражению (4.3) импульсная характеристика линейной цепи представляет собой алгебраическую сумму комплексно-сопряжённых и/или действительных экспонент с весами B_n . Полюса линейной системы называются также собственными частотами.

Основные свойства линейной системы определяются положением полюсов на комплексной p -плоскости. С другой стороны, физическая реализуемость линейных цепей накладывает ограничения на расположение полюсов в комплексной p -плоскости. Устойчивая (стабильная) линейная система не может иметь собственных частот, расположенных в правой полуплоскости комплексной p -плоскости. Все пассивные цепи являются стабильными. Полюса линейных цепей без потерь располагаются на вертикальной оси $j2\pi f$ комплексной p -плоскости.

Частотная характеристика линейной цепи $H(f)$ может быть получена из системной передаточной функции $H(p)$ путём замены p на $j2\pi f$:

$$H(f) = H(p) \Big|_{p=j2\pi f} = H_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^M (j2\pi f - p_{zi})}{\prod_{n=1}^N (j2\pi f - p_{pn})}. \quad (4.5)$$

Импульсная характеристика $h(t)$ и частотная характеристика $H(f)$ линейной цепи связаны друг с другом преобразованием Фурье:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt, \text{ б/п}, \quad (4.6)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi f t} df, \text{ Гц}. \quad (4.7)$$

Если частотная характеристика является безразмерной функцией, соответствующая ей импульсная характеристика будет иметь размерность «Гц». Частотная характеристика линейной цепи $H(f)$ в общем случае является комплексной функцией, которая по аналогии со спектрами может быть представлена в показательной или квадратурной формах:

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{j \arg H(f)} = \text{Re}\{H(f)\} + j \text{Im}\{H(f)\}. \quad (4.8)$$

Модуль частотной характеристики $H(f)$, называемый *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), представляет собой действительную функцию, обладающую свойством чётной симметрии:

$$\text{АЧХ} \Rightarrow |H(f)| = |H(-f)|. \quad (4.9)$$

Аргумент частотной характеристики $H(f)$, называемый *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ), обладает свойством нечётной симметрии:

$$\text{ФЧХ} \Rightarrow \arg H(f) = -\arg H(-f). \quad (4.10)$$

Автокорреляционная функция импульсной характеристики $h(t)$ линейной цепи может быть определена как свёртка $h(t)$ с её копией $h(-t)$, инвертированной во времени:

$$R_h(t) = h(t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(\tau - t) d\tau, \text{ Гц}, \quad (4.11)$$

где «*» – операция линейной свёртки.

Преобразование Фурье от АКФ импульсной характеристики даёт частотную характеристику линейной цепи по энергии

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_h(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2, \text{ б/п}, \quad (4.12)$$

где «*» означает комплексное сопряжение.

Пример 4.1

Рассмотрим процедуру отыскания временных и частотных характеристик фильтра верхних частот (ФВЧ) первого порядка по заданной диаграмме нулей и полюсов на p -плоскости, показанной на рис. 4.3. Граничная частота (рис. 4.1, б) полосы пропускания ФВЧ $f_{гп} = 1,5$ МГц.

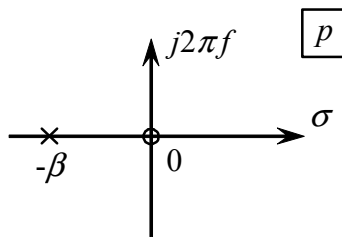


Рис. 4.3. Диаграмма нулей и полюсов на p -плоскости ФВЧ

По заданной диаграмме нулей и полюсов на p -плоскости запишем системную передаточную функцию фильтра в виде (4.40)

$$H(p) = H_0 \cdot \frac{P}{p + \beta}. \quad (4.13)$$

Зададимся $H_0 = 1$, что соответствует единичному усилению спектральных компонент на высоких частотах ($p \rightarrow \infty$). Определим положение собственной частоты $p_{п} = -\beta$, обеспечивающей заданную граничную частоту $f_{гп}$. Согласно (4.40) частотная характеристика ФВЧ определяется по следующей формуле:

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{j2\pi f + \beta}. \quad (4.14)$$

Граничной частотой называется частота, на которой значение АЧХ составляет 0,707 от максимального значения $H_0 = 1$. Решая нелинейное уравнение

$$|H(f_{гп})| = \frac{2\pi f_{гп}}{\sqrt{(2\pi f_{гп})^2 + \beta^2}} \approx 0,707 \cdot H_0 \quad (4.15)$$

относительно β , получаем искомое значение $\beta = 2\pi f_{гп} = 3\pi$ рад/мкс.

По известной системной передаточной функции ФВЧ найдём его импульсную характеристику. В этом примере системная функция $H(p)$ представляет собой неправильную дробь, поскольку степень полинома

числителя равна степени полинома знаменателя. Разложение неправильной дроби проводится делением полинома числителя на полином знаменателя с выделением целой части. В результате получим:

$$H(p) = \frac{p}{p + \beta} = 1 - \frac{\beta}{p + \beta} \Leftrightarrow h(t) = \delta(t) - \beta \cdot e^{-\beta t} \cdot u(t), \quad (4.16)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция; $u(t)$ – единичная ступенчатая функция, определяемая выражением (2.30).

При нахождении импульсной характеристики использовалась таблица преобразований Фурье (прил. 1). Импульсная характеристика $h(t)$ ФВЧ показана на рис. 4.4.

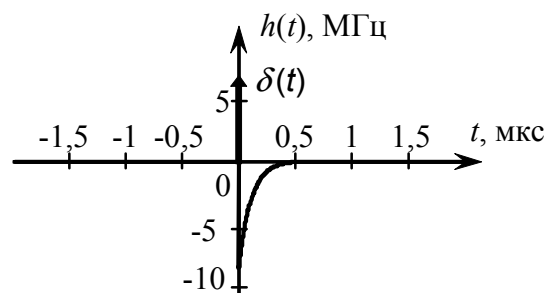


Рис. 4.4. Импульсная характеристика фильтра верхних частот

Амплитудная и фазовая частотные характеристики аналогового ФВЧ первого порядка показаны на рис. 4.5.

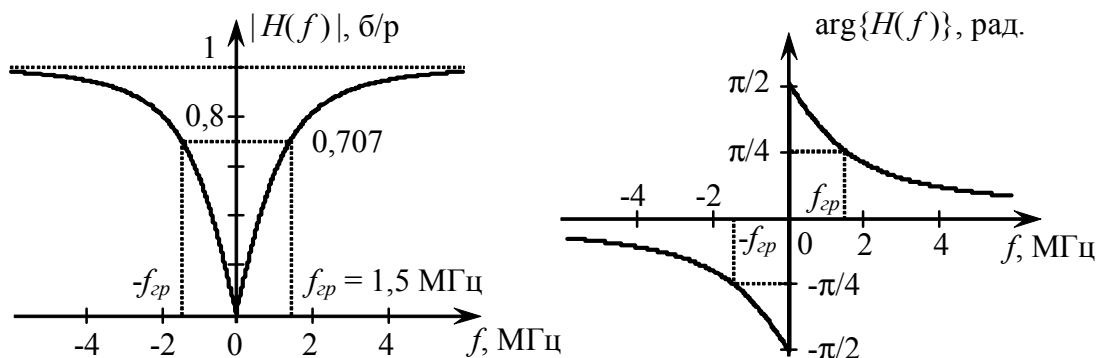


Рис. 4.5. Амплитудная и фазовая характеристики ФВЧ

По известной импульсной характеристике $h(t)$ аналогового фильтра с помощью формулы (4.11) определим аналитическое выражение АКФ импульсной характеристики $R_h(t)$:

$$R_h(t) = h(t) * h(-t) = [\delta(t) - \beta \cdot e^{-\beta t} \cdot u(t)] * [\delta(-t) - \beta \cdot e^{\beta t} \cdot u(-t)]. \quad (4.17)$$

Раскроем скобки в выражении (4.17), воспользовавшись свойством линейности операции свёртки, свойством свёртки с δ -функцией, а также чётностью дельта-функции $\delta(t) = \delta(-t)$. В результате получим

$$\begin{aligned} R_h(t) &= \delta(t) * \delta(-t) - [\beta \cdot e^{-\beta t} \cdot u(t)] * \delta(-t) - \\ &- \delta(t) * \beta \cdot e^{\beta t} \cdot u(-t) + [\beta \cdot e^{-\beta t} \cdot u(t)] * [\beta \cdot e^{\beta t} \cdot u(-t)] = \\ &= \delta(t) - \beta \cdot e^{-\beta t} \cdot u(t) - \beta \cdot e^{\beta t} \cdot u(-t) + \\ &+ \beta^2 [e^{-\beta t} \cdot u(t)] * [e^{\beta t} \cdot u(-t)]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Последнее слагаемое в выражении (4.18) представляет собой АКФ экспоненты, которая была найдена в примере 2.7. Таким образом, окончательно имеем

$$R_h(t) = \delta(t) - \beta \cdot e^{\beta|t|} + \beta^2 \cdot \frac{1}{2\beta} \cdot e^{-\beta|t|} = \delta(t) - \frac{\beta}{2} \cdot e^{-\beta|t|}. \quad (4.19)$$

Энергетическую частотную характеристику фильтра $G(f)$ определим по формуле (4.12):

$$G(f) = |H(f)|^2 = \frac{4\pi^2 f^2}{4\pi^2 f^2 + \beta^2}. \quad (4.20)$$

График функций $R_h(t)$ и $G(f)$ показан на рис. 4.6 и 4.7 соответственно.

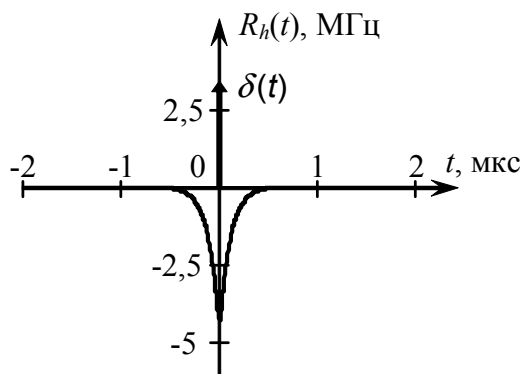


Рис. 4.6. АКФ импульсной характеристики ФВЧ

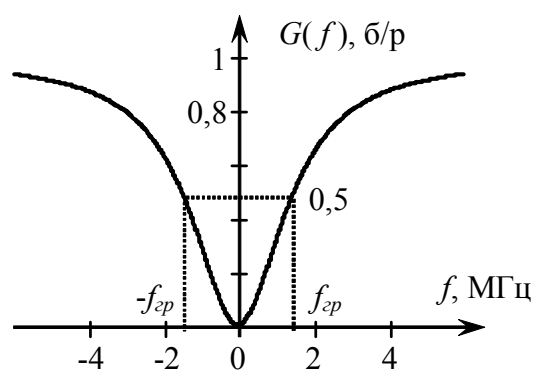


Рис. 4.7. Энергетическая частотная характеристика ФВЧ

Пример 4.2

Рассмотрим процедуру отыскания положения нулей и полюсов на p -плоскости для линейного фильтра заданного типа по его внешним характеристикам. Пусть имеется диаграмма особых точек некоторой

линейной системы, состоящая из двух комплексно сопряжённых полюсов и одного нуля в начале координат p -плоскости, представленная на рис. 4.8.

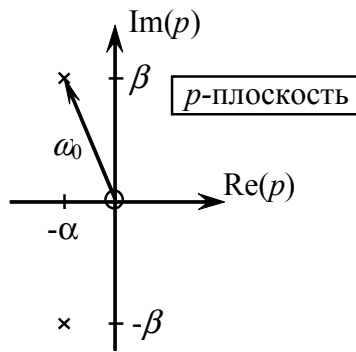


Рис. 4.8. Диаграмма нулей и полюсов линейной системы

По известной диаграмме нулей и полюсов на p -плоскости найдем системную функцию линейной цепи:

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{pH_0}{(p + \alpha + j\beta) \cdot (p + \alpha - j\beta)} = \frac{pH_0}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} = \\
 &= \frac{pH_0}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2}, \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

где H_0 – произвольный множитель, имеющий размерность рад/с.

По известной системной функции линейной цепи определим её частотную характеристику:

$$H(j2\pi f) = H(p)|_{p \rightarrow j2\pi f} = \frac{j2\pi f \cdot H_0}{-(2\pi f)^2 + 2\alpha j2\pi f + \alpha^2 + \beta^2}. \tag{4.22}$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики линейной цепи показаны на рис. 4.9. Эти характеристики полностью описываются тремя внешними параметрами: резонансной частотой f_0 , максимальным коэффициентом передачи K_0 на резонансной частоте и шириной полосы пропускания Δf по уровню 0,707 от максимума.

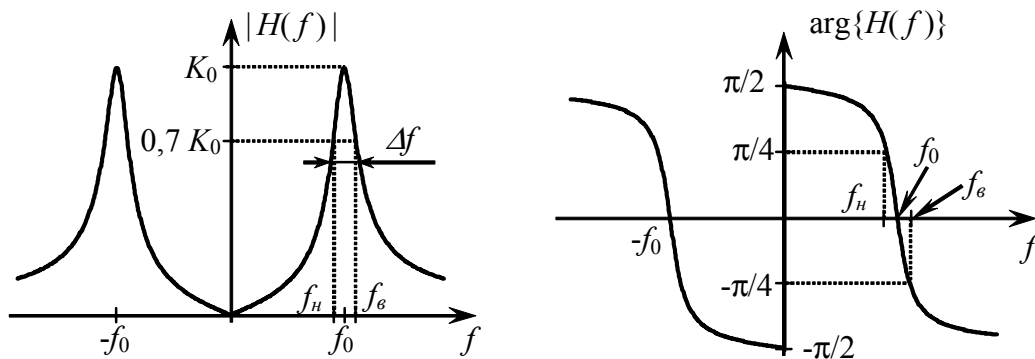


Рис. 4.9. Амплитудная и фазовая частотные характеристики линейной цепи

Для нахождения трёх неизвестных параметров диаграммы особых точек (рис. 4.8) α , β и H_0 нужно на основании выражения (4.22) для частотной характеристики составить три уравнения, определяющие заданные внешние параметры линейной цепи f_0 , K_0 и $j\beta$.

Резонансной частотой называется частота, на которой действительная часть знаменателя (4.22) равна нулю:

$$(2\pi f_0)^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (4.23)$$

Коэффициент усиления K_0 равен значению модуля частотной характеристики на резонансной частоте:

$$K_0 = H_0 / 2\alpha. \quad (4.24)$$

Граничные частоты полосы пропускания $f_{\text{в}}$ и $f_{\text{н}}$ можно определить из условия равенства модулей действительной и мнимой частей знаменателя (4.22) частотной характеристики

$$\begin{aligned} 2\alpha \cdot 2\pi f_{\text{в}} &= (2\pi f_{\text{в}})^2 - (2\pi f_0)^2; \\ 2\alpha \cdot 2\pi f_{\text{н}} &= (2\pi f_0)^2 - (2\pi f_{\text{н}})^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

После алгебраических преобразований получим

$$\alpha / \pi = f_{\text{в}} - f_{\text{н}} = \Delta f. \quad (4.26)$$

Совместное решение уравнений (4.23), (4.24) и (4.26) даёт искомые значения параметров диаграммы нулей и полюсов линейной системы:

$$\alpha = \pi \Delta f; \quad H_0 = 2\pi \Delta f \cdot K_0; \quad \beta = \sqrt{(2\pi f_0)^2 - (\pi \Delta f)^2}. \quad (4.27)$$

4.2. Прохождение импульсных сигналов через линейные цепи

Рассмотрим процедуру прохождения анализа аналогового импульсного сигнала $s(t)$ через линейную цепь согласно рис. 4.10.

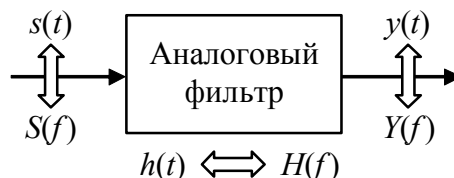


Рис. 4.10. Прохождение аналогового импульсного сигнала через линейную цепь

Сигнал на выходе фильтра может быть найден либо во временной области по известному сигналу на входе фильтра $s(t)$ и импульсной

характеристике фильтра $h(t)$, либо в частотной области по известному спектру сигнала на входе фильтра $S(f)$ и частотной характеристике фильтра $H(f)$:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(t-\tau) d\tau \\
 \Downarrow F \quad \Downarrow F \quad \Downarrow F & \\
 Y(f) &= S(f) \times H(f).
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

Автокорреляционная функция аналогового импульсного сигнала на выходе фильтра может быть найдена несколькими способами:

- по известному сигналу на выходе фильтра:

$$R_y(t) = y(t) * y(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot y(\tau-t) d\tau;
 \tag{4.29}$$

- по известным АКФ сигнала на входе фильтра $R_s(t)$ и АКФ импульсной характеристики аналогового фильтра $R_h(t)$:

$$R_y(t) = R_s(t) * R_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) \cdot R_h(t-\tau) d\tau, \text{ В}^2 \cdot \text{с}.
 \tag{4.30}$$

Энергетический спектр сигнала на выходе фильтра также может быть найден несколькими способами:

- по известному спектру сигнала на выходе фильтра:

$$W_y(f) = Y(f) \cdot Y^*(f) = |Y(f)|^2;
 \tag{4.31}$$

- по известным энергетическому спектру сигнала на входе фильтра $W_s(f)$ и энергетической частотной характеристике аналогового фильтра $G(f)$:

$$W_y(f) = W_s(f) \cdot G(f).
 \tag{4.32}$$

Энергетический спектр и автокорреляционная функция аналогового импульсного сигнала на выходе фильтра связаны между собой преобразованием Фурье:

$$R_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f) \cdot e^{j2\pi f t} df,
 \tag{4.33}$$

$$W_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt.
 \tag{4.34}$$

Пример 4.3

Рассмотрим пример анализа прохождения аналогового импульсного сигнала $s(t)$ (2.29) через фильтр верхних частот первого порядка, описанный в примере 4.1.

Найдём аналитическое выражение сигнала на выходе фильтра $y(t)$ во временной области с помощью формулы (4.28):

$$y(t) = s(t) * h(t) = [A \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)] * [\delta(t) - \beta \cdot e^{-\beta t} \cdot u(t)] = \frac{A}{\alpha - \beta} \cdot (\alpha \cdot e^{-\alpha t} - \beta \cdot e^{-\beta t}) \cdot u(t). \quad (4.35)$$

Временная функция сигнала $y(t)$ показана на рис. 4.11.

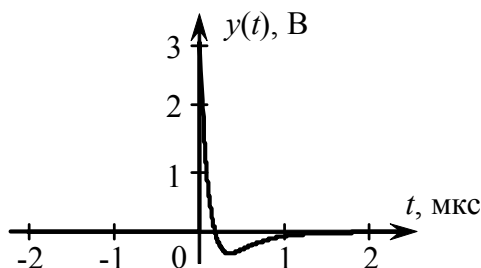


Рис. 4.11. Аналоговый импульсный сигнал на выходе ФВЧ

Спектр выходного сигнала найдём по известному спектру экспоненциального сигнала (2.31) и частотной характеристике ФВЧ (4.14):

$$Y(f) = S(f) \cdot H(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f} \cdot \frac{j2\pi f}{j2\pi f + \beta}. \quad (4.36)$$

Амплитудный и фазовый спектры выходного сигнала $y(t)$ показаны на рис. 4.12.

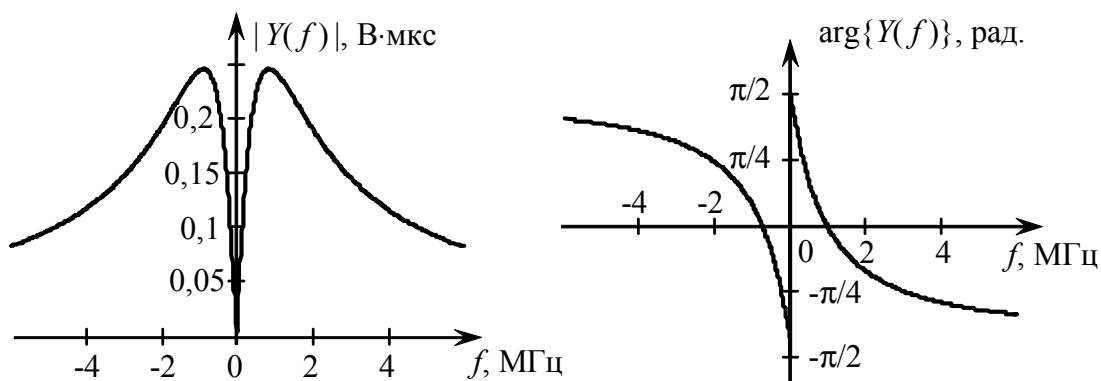


Рис. 4.12. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $y(t)$ на выходе ФВЧ

Для нахождения автокорреляционной функции аналогового импульсного сигнала на выходе фильтра $R_y(t)$ можно воспользоваться

формулой (4.30). Энергетический спектр $W_y(f)$ сигнала на выходе ФВЧ определим с помощью формулы (4.32).

АКФ и энергетический спектр сигнала на выходе фильтра представлены на рис. 4.13 и 4.14 соответственно.

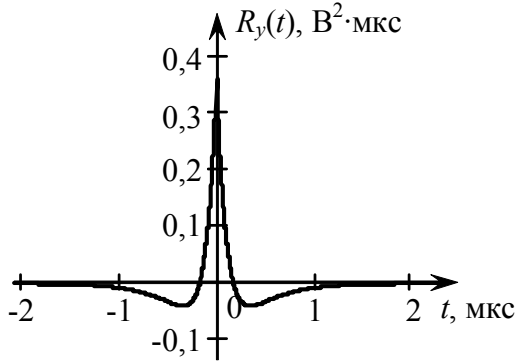


Рис. 4.13. АКФ сигнала $y(t)$ на выходе ФВЧ

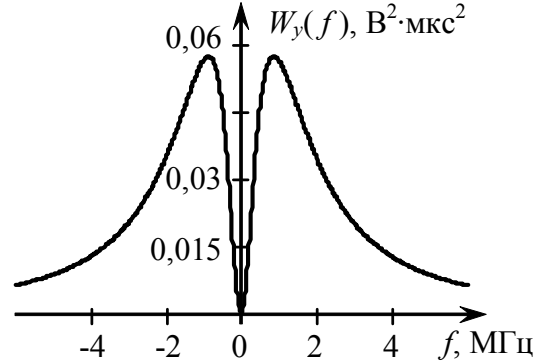


Рис. 4.14. Энергетический спектр сигнала на выходе ФВЧ

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и энергетического спектра сигнала $y(t)$ также воспользуемся теоремой Парсеваля для аналогового импульсного сигнала и свойством преобразования Фурье для АКФ сигнала:

$$E_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f) df \approx 0,36 \text{ В}^2 \cdot \text{мкс}; \quad (4.37)$$

$$W_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) dt = 0, \quad (4.38)$$

где E_y – энергия сигнала $y(t)$.

4.3. Прохождение периодических сигналов через линейные цепи

Рассмотрим процедуру анализа прохождения аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ через линейную цепь (рис. 4.15).

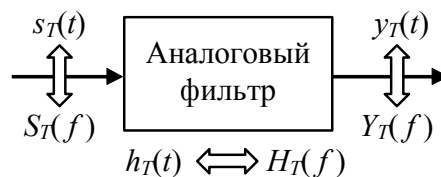


Рис. 4.15. Прохождение аналогового периодического сигнала через линейную цепь

Для упрощения временного анализа прохождения периодических сигналов через фильтр его импульсную характеристику удобно представить в виде периодической функции:

$$h_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \text{ Гц}, \quad (4.39)$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика исходного аналогового фильтра; T – период повторения сигнала на входе линейной цепи.

В этом случае частотная характеристика фильтра становится дискретной функцией, которая может быть найдена следующим образом:

$$H_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = H(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), \quad (4.40)$$

$$H[m] = \frac{1}{T} \cdot H\left(\frac{m}{T}\right), \text{ Гц}. \quad (4.41)$$

Периодическая импульсная характеристика $h_T(t)$ и дискретная частотная характеристика $H[m]$ аналогового фильтра связаны друг с другом разложением в ряд Фурье:

$$h_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H[m] \cdot e^{j\frac{2\pi m t}{T}}, \quad (4.42)$$

$$H[m] = \frac{1}{T} \int_0^T h_T(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi m t}{T}} dt. \quad (4.43)$$

Автокорреляционная функция периодической импульсной характеристики $h_T(t)$ аналогового фильтра может быть найдена следующим образом:

$$R_{h_T}(t) = h_T(t) \otimes h_T(-t) = \int_0^T h_T(\tau) \cdot h_T(\tau - t) d\tau, \text{ Гц}, \quad (4.44)$$

где « \otimes » – операция круговой свёртки.

АКФ периодической импульсной характеристики фильтра может быть найдена по известной АКФ исходного аналогового фильтра:

$$R_{h_T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(t - kT) = R_h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (4.45)$$

где «*» – операция линейной свёртки.

Дискретная частотная характеристика по мощности аналогового фильтра определяется следующими соотношениями:

$$K_T(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), \text{ б/р}, \quad (4.46)$$

$$K[m] = \frac{1}{T} \cdot G\left(\frac{m}{T}\right) = T \cdot H[m] \cdot H^*[m] = T \cdot |H[m]|^2, \text{ Гц}. \quad (4.47)$$

Частотная характеристика по мощности и автокорреляционная функция периодической импульсной характеристики линейной цепи связаны между собой рядом Фурье:

$$K[m] = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T R_{h_T}(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi mt}{T}} dt, \quad (4.48)$$

$$R_{h_T}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K[m] \cdot e^{j\frac{2\pi mt}{T}}. \quad (4.49)$$

Пример 4.4

Рассмотрим пример нахождения характеристик фильтра верхних частот (пример 4.1) для анализа прохождения аналоговых периодических сигналов.

Периодическая импульсная характеристика аналогового фильтра $h_T(t)$ может быть получена из импульсной характеристики исходного ФВЧ (4.16) по формуле (4.39).

Периодическая импульсная характеристика аналогового фильтра $h_T(t)$ показана на рис. 4.16.

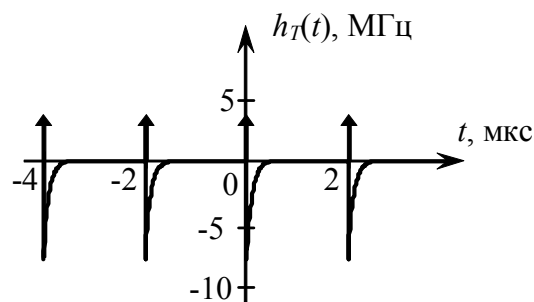


Рис. 4.16. Периодическая импульсная характеристика ФВЧ

Дискретная частотная характеристика фильтра $H_T(f)$, найденная по известной частотной характеристике исходного аналогового фильтра по формуле (4.41), показана на рис. 4.17.

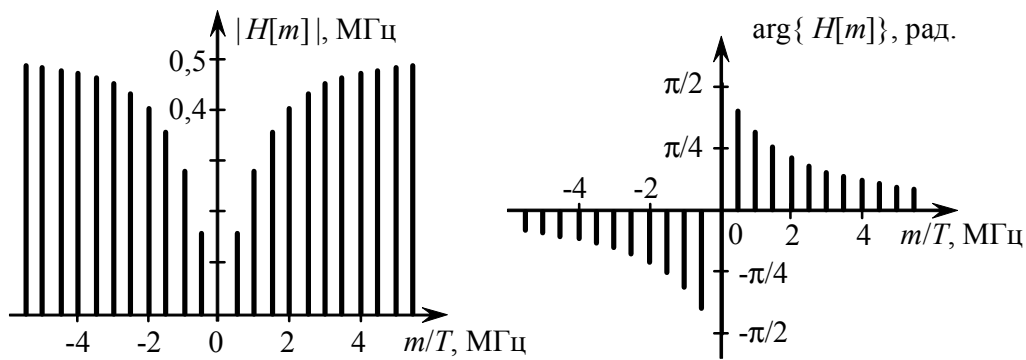


Рис. 4.17. Амплитудная и фазовая характеристики аналогового ФВЧ

По известной периодической импульсной характеристике $h_T(t)$ аналогового фильтра с помощью формулы (4.44) может быть определена автокорреляционная функция импульсной характеристики $R_{h_T}(t)$, показанная на рис. 4.18, а по формуле (4.47) можно оценить дискретную частотную характеристику по мощности фильтра $K_T(f)$, отсчёты которой представлены на рис. 4.19.

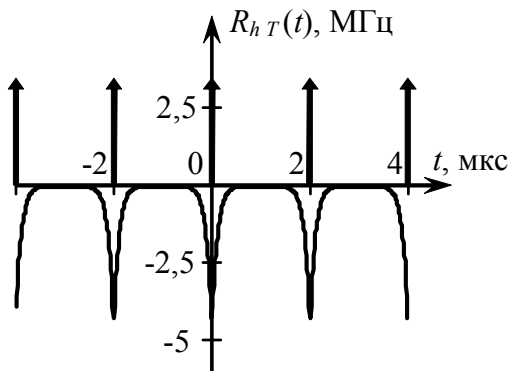


Рис. 4.18. Периодическая АКФ импульсной характеристики ФВЧ

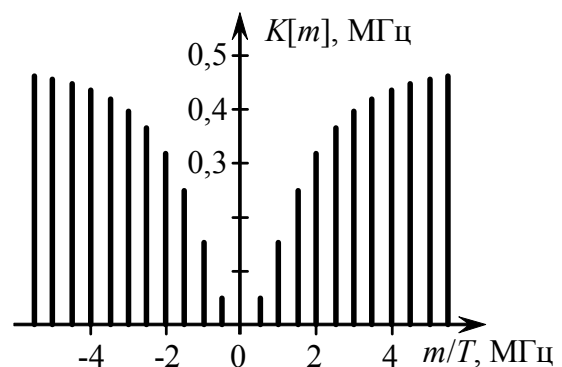


Рис. 4.19. Частотная характеристика ФВЧ по мощности

Далее рассмотрим процедуру нахождения сигнала на выходе линейной цепи. Аналоговый периодический сигнал на выходе фильтра может быть найден путём линейной свёртки сигнала на входе линейной цепи с импульсной характеристикой фильтра:

$$y_T(t) = s_T(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau, \quad (4.50)$$

где «*» – операция линейной свёртки. Чтобы избавиться от необходимости интегрировать в бесконечных пределах, можно перейти от линейной свёртки к круговой свёртке периодических сигналов. В этом случае сигнал на выходе фильтра и его спектр могут быть найдены следующим образом:

$$\begin{aligned}
y_T(t) &= s_T(t) \otimes h_T(t) = \int_0^T s_T(\tau) \cdot h_T(t-\tau) d\tau \\
\Downarrow FS & \quad \Downarrow FS \quad \Downarrow FS \\
Y[m] &= T \cdot S[m] \times H[m].
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Спектр периодического сигнала на выходе аналогового фильтра может быть найден следующим образом:

$$Y_T(f) = S_T(f) \cdot H(f). \tag{4.52}$$

Автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала на выходе аналогового фильтра может быть найдена различными способами:

- по известному сигналу на выходе фильтра:

$$R_{y_T}(t) = \frac{1}{T} \cdot y_T(t) \otimes y_T(-t) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T y_T(\tau) \cdot y_T(\tau-t) d\tau; \tag{4.53}$$

- по известной АКФ сигнала на входе фильтра и АКФ импульсной характеристики аналогового фильтра:

$$R_{y_T}(t) = R_{s_T}(t) \otimes R_{h_T}(t) = \int_0^T R_{s_T}(\tau) \cdot R_{h_T}(t-\tau) d\tau. \tag{4.54}$$

Спектр мощности периодического сигнала на выходе фильтра также может быть найден различными способами:

- по известному спектру сигнала на выходе фильтра:

$$P_y[m] = \frac{1}{T} \cdot T \cdot Y[m] \cdot Y^*[m] = |Y_T[m]|^2; \tag{4.55}$$

- по известному спектру мощности сигнала на входе фильтра и частотной характеристике аналогового фильтра по мощности:

$$P_y[m] = T \cdot P_s[m] \cdot K[m]. \tag{4.56}$$

Спектр мощности и автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала на выходе фильтра связаны между собой рядом Фурье:

$$P_y[m] = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T R_{y_T}(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi mt}{T}} dt; \tag{4.57}$$

$$R_{y_T}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_y[m] \cdot e^{j\frac{2\pi mt}{T}}. \tag{4.58}$$

Пример 4.5

Рассмотрим пример анализа прохождения аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ через фильтр верхних частот первого порядка, описанный выше. Сигнал на выходе фильтра $y_T(t)$ и спектр этого сигнала $Y[m]$, найденные по формуле (4.51), показаны на рис. 4.20 и 4.21 соответственно.

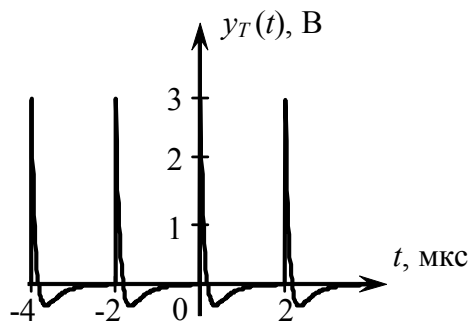


Рис. 4.20. Аналоговый периодический сигнал на выходе ФВЧ

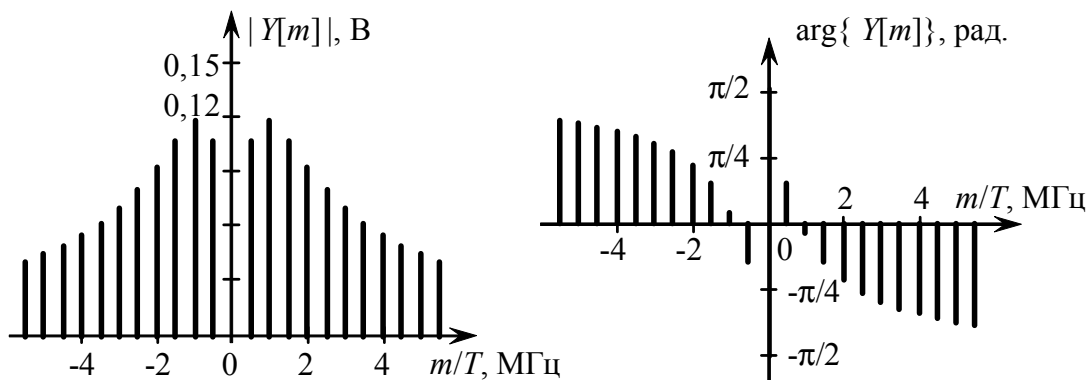


Рис. 4.21. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $y_T(t)$ на выходе ФВЧ

Для нахождения автокорреляционной функции аналогового периодического сигнала на выходе фильтра $R_{y_T}(t)$ можно воспользоваться формулами (4.53) или (4.54). Спектр мощности $P_y[m]$ периодического сигнала на выходе ФВЧ может быть оценен с помощью формул (4.55) или (4.56). Полученные АКФ и спектр мощности сигнала на выходе фильтра представлены на рис. 4.22 и 4.23 соответственно.

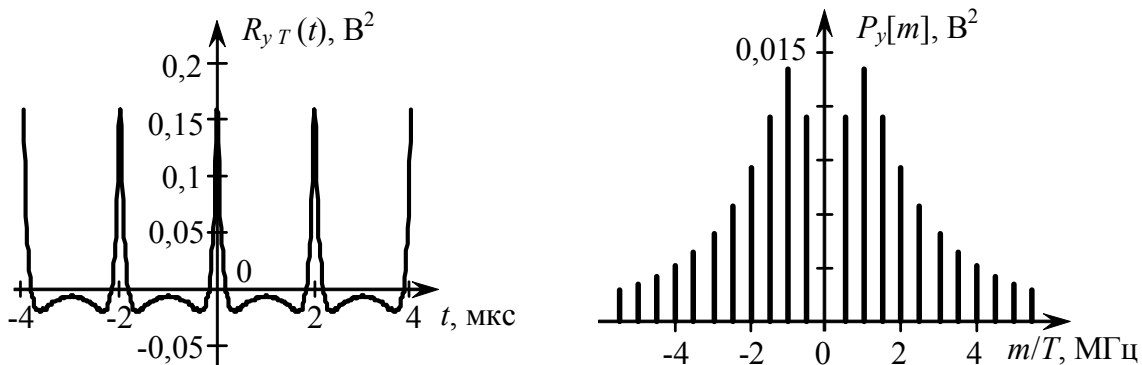


Рис. 4.22. АКФ сигнала $y_T(t)$
на выходе ФВЧ

Рис. 4.23. Спектр мощности
сигнала $y_T(t)$ на выходе ФВЧ

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и спектра мощности сигнала $y_T(t)$ на выходе фильтра также воспользуемся теоремой Парсеваля для периодических сигналов и свойством разложения в ряд Фурье для АКФ сигнала:

$$P_{y\text{cp}} = R_{y_T}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_y[m] \approx 0,17 \text{ В}^2; \quad (4.59)$$

$$P_y[0] = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T R_{y_T}(t) dt = 0, \quad (4.60)$$

где $P_{y\text{cp}}$ – средняя за период мощность сигнала $y_T(t)$.

Выводы по разделу

Основным назначением линейных систем является фильтрация сигналов, заключающаяся в целенаправленном изменении частотных характеристик (спектра) входных сигналов. Побочными эффектами фильтрации могут быть нежелательные искажения временной функции выходного сигнала: задержка, скол вершины, размывание переднего фронта, звон и т.д. Линейные системы описываются диаграммой нулей и полюсов в плоскости комплексной частоты, системными передаточными функциями или частотными характеристиками. Любой из указанных способов описания цепи в спектральной области является эквивалентным, т.е. между ними существует однозначное соответствие. Во временной области линейные системы описываются импульсными характеристиками, являющимися реакцией цепи на входное воздействие в виде δ -функции. Взаимосвязь временных и спектральных характеристик линейной цепи определяется преобразованием Фурье, а для физически реализуемых линейных цепей – односторонним преобразованием Лапласа.

Прохождение сигнала через линейную систему можно анализировать как в спектральной области, так и во временной области. Спектр выходного сигнала определяется произведением спектра входного сигнала и частотной характеристики цепи. Временная функция выходного сигнала находится с помощью линейной свёртки временной функции входного сигнала с импульсной характеристикой цепи.

Автокорреляционную функцию выходного сигнала можно определить с помощью свёртки АКФ входного сигнала с АКФ импульсной характеристики линейной цепи. Нахождение энергетического спектра выходного сигнала проводится перемножением энергетического спектра входного сигнала и энергетической частотной характеристики линейной цепи. При этом полностью теряется информация о фазовых характеристиках входного сигнала и самой цепи.

В случае анализа прохождения периодического сигнала через линейную цепь в спектральной области удобнее пользоваться комплексными коэффициентами ряда Фурье входного сигнала и дискретными отсчётами частотной характеристики линейной цепи на частотах гармоник входного сигнала. Произведение соответствующих чисел даёт совокупность комплексных коэффициентов ряда Фурье выходного сигнала. Анализ прохождения периодических сигналов через линейные системы во временной области проводится с помощью операции круговой (циклической) свёртки. При этом для представления линейной цепи используется периодическая импульсная характеристика, получаемая периодическим повторением импульсной характеристики линейной цепи.

Спектр мощности периодического сигнала на выходе линейной цепи можно определить произведением дискретных отсчётов энергетической частотной характеристики линейной цепи и квадратов модулей коэффициентов ряда Фурье входного сигнала. АКФ выходного периодического сигнала находится в результате выполнения операции циклической свёртки АКФ входного периодического сигнала и АКФ периодической импульсной характеристики линейной цепи.

Контрольные задачи

4.1. На вход цепи, показанной на рис. 4.24, подается прямоугольный импульс с амплитудой $A = 2$ В и длительностью $\tau = 3 \cdot 10^{-4}$ с. Найти сигнал и его спектр на выходе цепи при $R_1 = R_2 = 10^3$ Ом, $C = 0,2 \cdot 10^{-6}$ Ф.

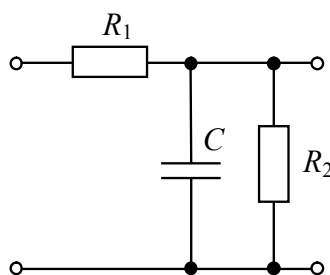


Рис. 4.24. Линейная RC-цепь первого порядка

4.2. Решить задачу 4.1 при подаче на вход цепи треугольного импульса, показанного на рис. 4.25, при $E = 5$ В и длительностью $\tau = 500$ мкс.

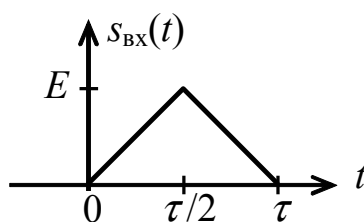


Рис. 4.25. Треугольный импульс $s_{вх}(t)$

4.3. В момент времени $t = 0$ к электрической цепи, изображенной на рис. 4.26, подключается постоянная ЭДС $E = 100$ В. Найти закон изменения напряжения на индуктивности и его спектр. Параметры цепи: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $L = 10^{-2}$ Гн.

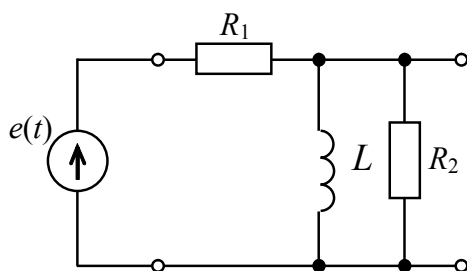


Рис. 4.26. Линейная RL-цепь первого порядка

4.4. Решить задачу 4.3 для случая, когда ЭДС на входе линейной цепи действует напряжение $e(t) = 10 \cdot e^{-t/\tau_0} u(t)$, В, $\tau_0 = 10^{-3}$, с.

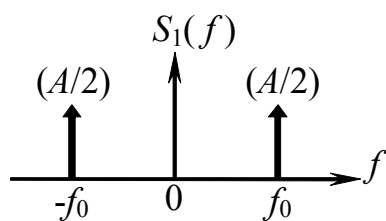
4.5. На вход дифференцирующей цепочки с постоянной времени $\tau_{CR} = 250$ мкс подается периодическая последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой 2 В, длительностью 250 мкс и частотой следования 1 кГц. Определить напряжение на выходе $u_{вых}(t)$ и найти спектр выходного сигнала.

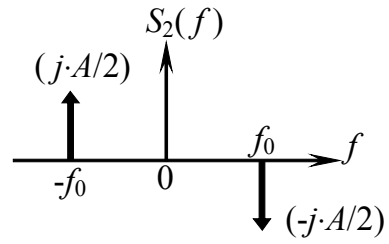
ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 2.1

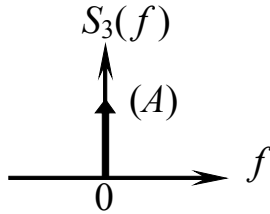
а) $S_1(f) = \frac{A}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$

б) $S_2(f) = \frac{A}{2j} \cdot [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$

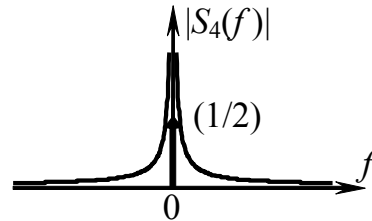




в) $S_3(f) = A \cdot \delta(f)$

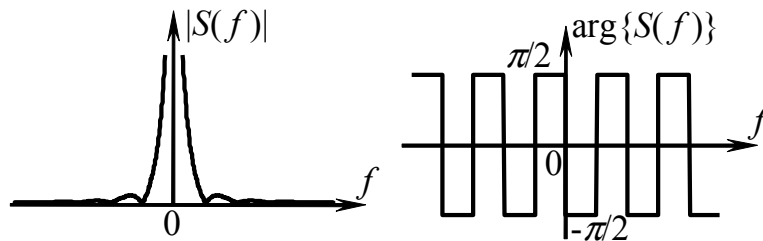


г) $S_4(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) - \frac{j}{2\pi f}$



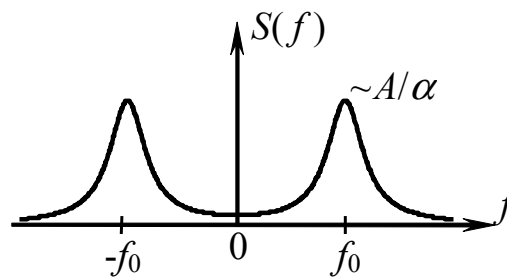
Задача 2.2

$$S(f) = \frac{A}{j2\pi f} \cdot \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$$



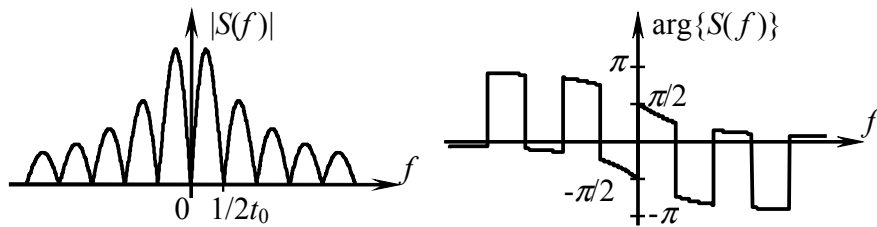
Задача 2.3

$$S(f) = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + (2\pi(f + f_0))^2} + \frac{A\alpha}{\alpha^2 + (2\pi(f - f_0))^2}$$



Задача 2.4

$$S(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f} \cdot 2j \cdot \sin(2\pi f t_0)$$



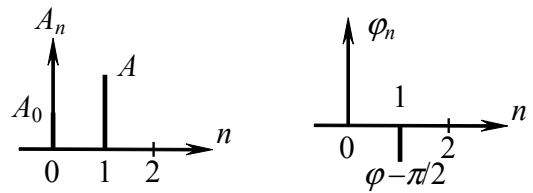
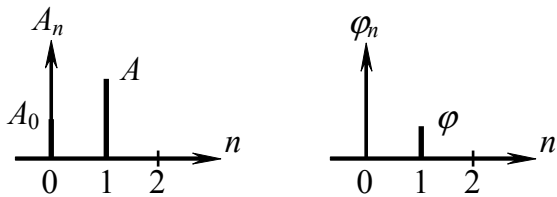
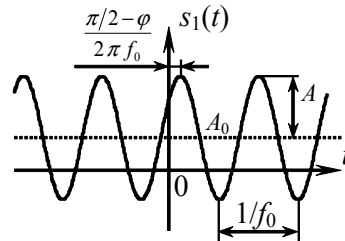
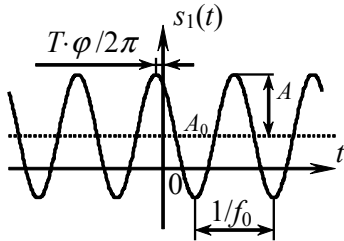
Задача 2.5

$$s(t) = \frac{2\pi\beta B}{\beta^2 + (2\pi t)^2}$$

Задача 3.1

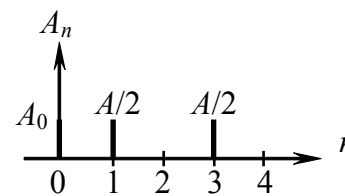
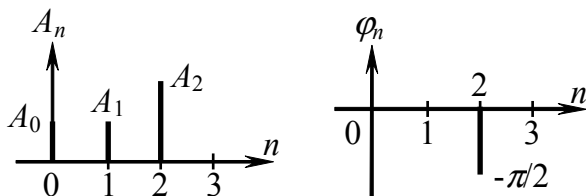
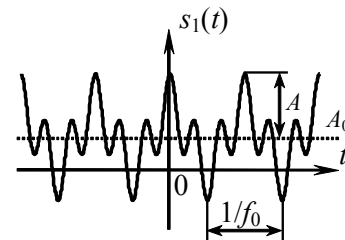
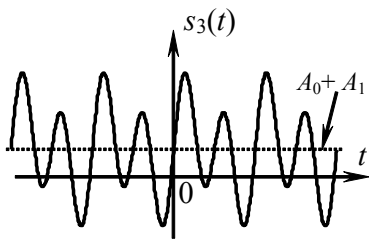
а) $A_n = \begin{cases} A, & n=1, \\ 0, & n \geq 2, \end{cases} \quad \varphi_n = \begin{cases} \varphi, & n=1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$

б) $A_n = \begin{cases} A, & n=1, \\ 0, & n \geq 2, \end{cases} \quad \varphi_n = \begin{cases} \varphi - \frac{\pi}{2}, & n=1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$



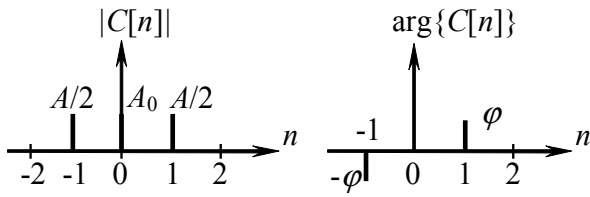
в) $A_n = \begin{cases} A_1, & n=1, \\ A_2, & n=2, \\ 0, & n \geq 3, \end{cases} \quad \varphi_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ -\pi/2, & n=2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$

г) $A_n = \begin{cases} A/2, & n=1, \\ A/2, & n=3, \\ 0, & n=2, n \geq 4, \end{cases} \quad \varphi_n = 0, n \geq 1.$

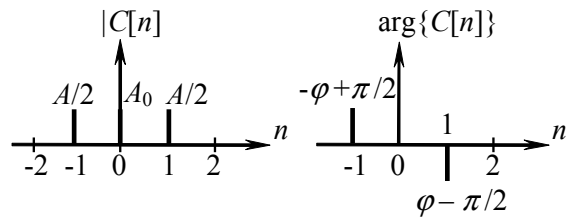


Задача 3.2

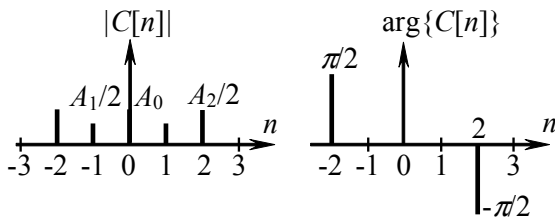
a) $C[0] = A_0; C[\pm 1] = \frac{A}{2} \cdot e^{\pm j\varphi}; C[n] = 0, |n| \geq 2.$



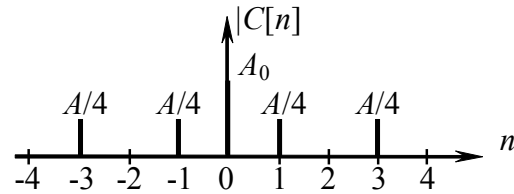
б) $C[0] = A_0; C[\pm 1] = \frac{A}{2} \cdot e^{\pm j(\varphi - \frac{\pi}{2})}; C[n] = 0, |n| \geq 2.$



в) $C[0] = A_0; C[\pm 1] = \frac{A_1}{2}; C[\pm 2] = \frac{A_2}{2} \cdot e^{\mp j\frac{\pi}{2}}; C[n] = 0, |n| \geq 3.$

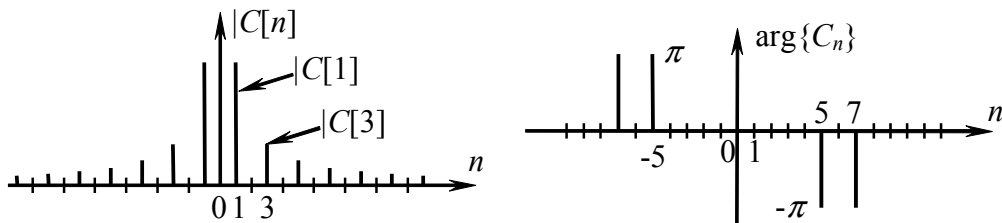


г) $C[0] = A_0; C[\pm 1] = \frac{A}{4}; C[\pm 2] = 0; C[\pm 3] = \frac{A_2}{4}; C[n] = 0, |n| \geq 4.$



Задача 3.3

$$C[0] = 0, \quad C[n] = \frac{A \cdot \tau_0}{T} \cdot \frac{\sin(n\pi\tau_0/T)}{n\pi\tau_0/T} \cdot (1 - e^{-j\pi n}).$$



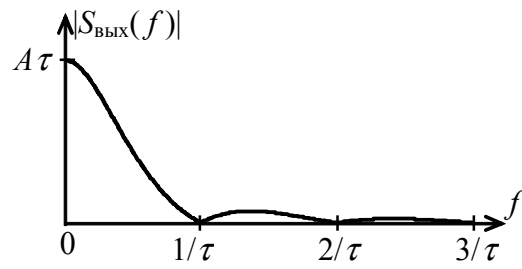
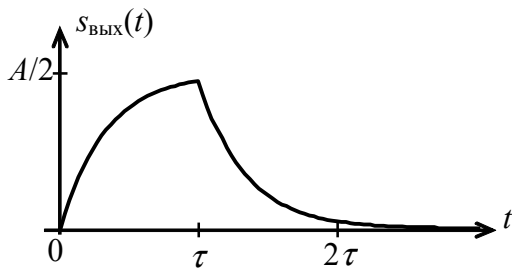
Задача 3.4

$$A_0 = \frac{A}{\pi}, \quad A_1 = \frac{A}{2}.$$

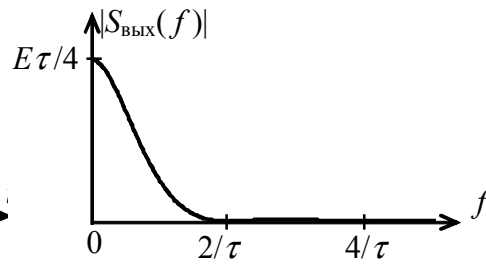
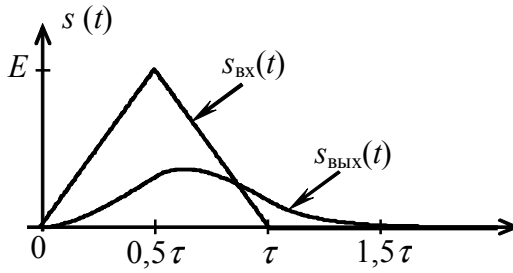
Задача 3.5

$$C[0] = \frac{A}{2}, \quad C[n] = \frac{A}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cdot e^{-j\pi n}.$$

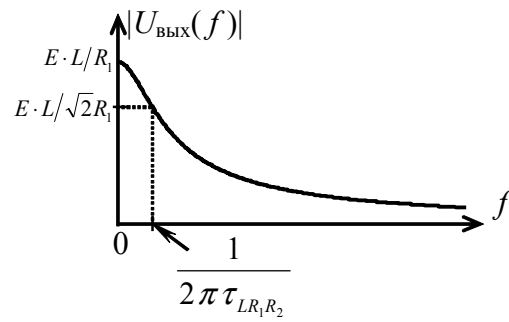
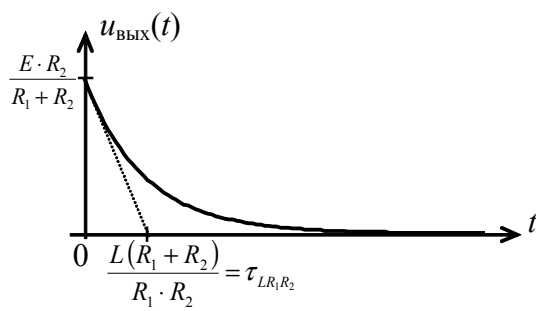
Задача 4.1



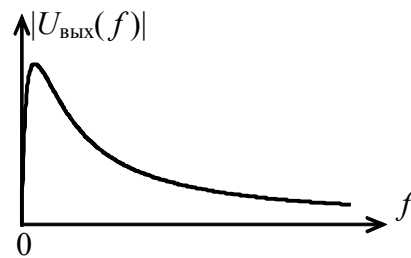
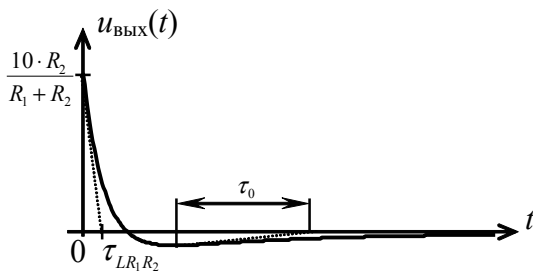
Задача 4.2



Задача 4.3



Задача 4.4



Задача 4.5

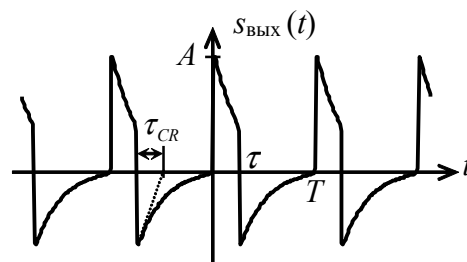
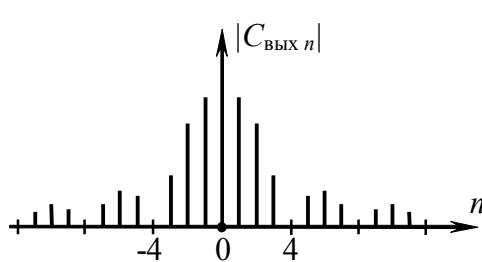
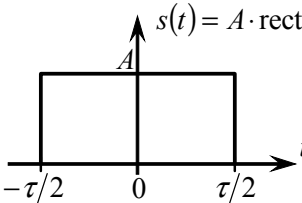
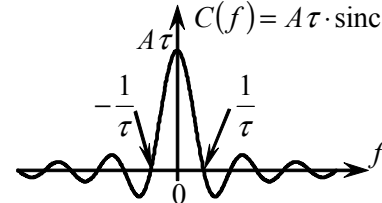
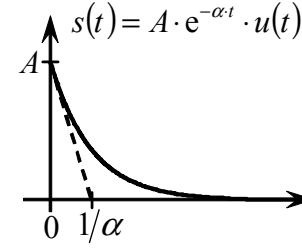
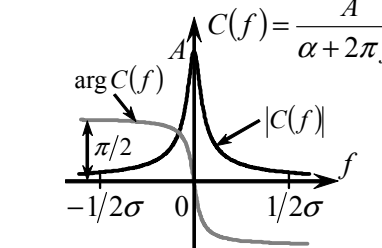
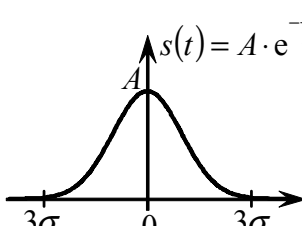
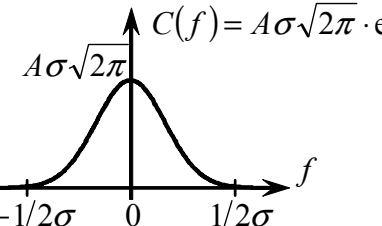
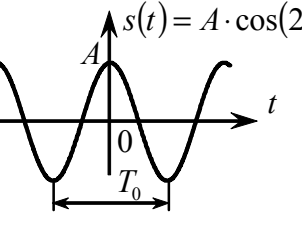
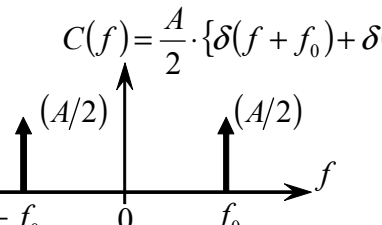
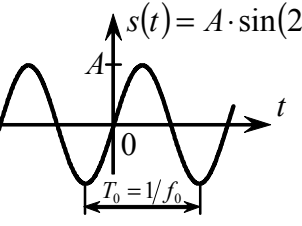
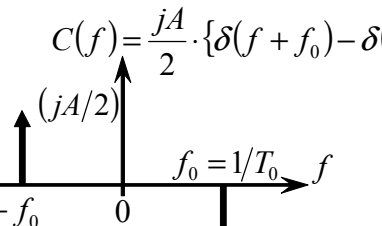
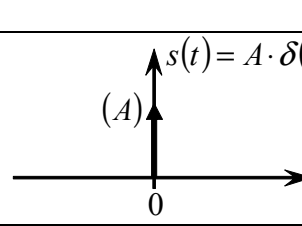
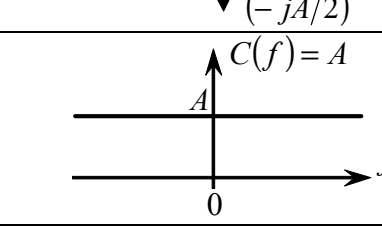
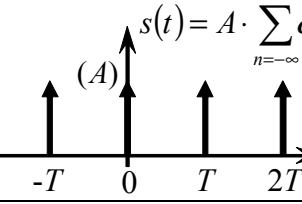
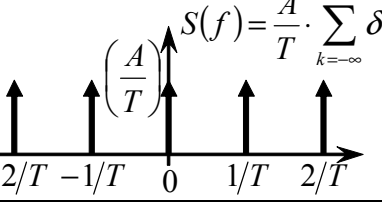


ТАБЛИЦА СИГНАЛОВ И ИХ СПЕКТРОВ

Сигнал $s(t)$	Спектр сигнала $C(f)$
$s(t) = A \cdot \text{rect}_\tau(t)$ 	$C(f) = A\tau \cdot \text{sinc}(\pi f\tau)$ 
$s(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)$ 	$C(f) = \frac{A}{\alpha + 2\pi f}$ 
$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ 	$C(f) = A\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-2(\pi f\sigma)^2}$ 
$s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ 	$C(f) = \frac{A}{2} \cdot \{\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\}$ 
$s(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ 	$C(f) = \frac{jA}{2} \cdot \{\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\}$ 
$s(t) = A \cdot \delta(t)$ 	$C(f) = A$ 
$s(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 	$S(f) = \frac{A}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ 

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

№ п/п	Операция	$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) e^{j2\pi f t} df$	$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$
1.	Сопряженная симметрия	$\text{Im}[s(t)] = 0$, т.е. $x(t)$ действительна	$C(f) = C^*(-f)$, т.е. $\text{Re}[C(f)] = \text{Re}[C(-f)]$, $\text{Im}[C(f)] = -\text{Im}[C(-f)]$
2.	Инвертирование по t	$s(-t)$	$C^*(f)$
3.	Чётная симметрия	$s(t) = s(-t)$	$C(f) = C(-f)$
4.	Нечётная симметрия	$s(t) = -s(-t)$	$C(f) = -C(-f)$
5.	Линейность	$a s_1(t) + b s_2(t)$	$a C_1(f) + b C_2(f)$
6.	Дуальность f и t	$A \cdot C(\alpha \cdot t)$	$\frac{A}{ \alpha } \cdot s\left(-\frac{f}{\alpha}\right)$
7.	Временная задержка	$s(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} C(f)$
8.	Умножение на $e^{j2\pi f_0 t}$	$s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$	$C(f - f_0)$
9.	Модуляция	$s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$ $s(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}[C(f + f_0) + C(f - f_0)]$ $\frac{j}{2}[C(f + f_0) - C(f - f_0)]$
10.	Масштабирование	$s(a \cdot t)$	$\frac{1}{ a } C\left(\frac{f}{a}\right)$
11.	Дифференцирование	$\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$(j2\pi f)^n C(f)$
12.	Интегрирование	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{C(f)}{j2\pi f} + \frac{C(0)}{2} \delta(f)$
13.	Умножение на t	$t \cdot s(t)$	$-\frac{1}{j2\pi} \frac{dC(f)}{df}$
14.	Свёртка	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$X(f) \cdot Y(f)$
15.	Произведение	$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) Y(f - \lambda) d\lambda$
16.	Теорема Парсеваля	$E = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) ^2 dt$	$E = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) ^2 df$
17.	Свойство площади	$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) df$	$C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Дрофа, 2006.
2. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 1985.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. В двух частях. – М.: Мир, 1988.
5. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (временной анализ): Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
6. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (частотный анализ): Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
7. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Линейные радиоэлектронные цепи и сигналы. Упражнения и задачи: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1994.
8. Кузнецов Ю.В., Голованов В.В. Временной и частотный анализ линейных цепей: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1999.
9. Латышев В.В. Ручьев М.К., Селин В.Я., Сотсков Б.М. Спектральный анализ сигналов: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1988.
10. Латышев В.В. Ручьев М.К., Селин В.Я., Сотсков Б.М. Методы анализа прохождения сигналов через радиотехнические устройства: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1991.
11. Латышев В.В., Ручьев М.К., Селин В.Я., Сотсков Б.М. Преобразование сигналов в нелинейных цепях: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1994.
12. Голованов В.В., Яковлев А.О. Проектирование аналоговых и цифровых фильтров: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1993.