

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени СЕРГО ОРДЖONIKIDZE

Ю.В. ТРОНИН О.В. ГУРСКИЙ

СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ

Учебное пособие

Утверждено  
на заседании редсовета  
II мая 1989 г.

Москва  
Издательство МАИ  
1990

621.37(075)

Т732

УДК:621.372.57(075.8)

Тронин Ю.В., Гурский О.В. Синтез фильтров: Учебное пособие, -  
М.: Изд-во МАИ, 1990. - 76 с.: ил.

В учебном пособии по курсам "Радиотехнические цепи и сигналы", "Основы радиоэлектроники" изложены основные вопросы синтеза "классических" фильтров и реализации фильтров на  $LC$ -элементах и  $ARC$ -схемах. Пособие может быть использовано при курсовом и дипломном проектировании. Оно рассчитано на студентов дневной и вечерней форм обучения по специальности "Конструирование и технология радиоэлектронных средств (РЭС)".

Рецензенты: В.Т. Терешкин, С.В. Мухин

#### ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие посвящено одному из основных вопросов проектирования современных радиоэлектронных устройств - синтезу фильтров. Фильтры описываемых в настоящем издании типов являются важной составной частью радиотехнических устройств различного назначения и входят в задание студентам на проектирование.

Учебный материал по этому вопросу на дает возможности пользоваться с достаточным пониманием обширной литературой (например, [1, 2, 5, 8] и др.), которая требует более глубоких знаний, чем предусматривается учебным планом.

Авторы ставят целью преодолеть этот недостаток. Материал, включенный в книгу, рассчитан на то, чтобы помочь студентам в самостоятельной работе с литературой и сознательном использовании ее в практическом проектировании.

© Московский авиационный институт, 1990

## I. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ

### I.I. Постановка задачи синтеза фильтра

Проектирование и разработка фильтра в значительной мере зависят от того, какие его характеристики мы желаем получить, т.е. от формулировки критерия.

Одной из типичных постановок задачи является обеспечение выделения полезного сигнала на фоне мешающих сигналов (помех), отличающихся от полезного расположением спектральных составляющих.

Идеальный частотно-избирательный фильтр должен равномерно пропускать все спектральные составляющие сигнала в некоторой заданной полосе частот (полосе пропускания) и не пропускать составляющие других частот (в полосе задерживания). Этот критерий определяет желаемый вид амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) фильтра, не касаясь других характеристик: фазочастотной (ФЧХ), импульсной, переходной.

На рис. I.1 показаны АЧХ идеальных фильтров четырех основных типов: фильтра нижних частот (ФНЧ), фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ), точнее, полосно-пропускающего фильтра, и режекторного фильтра (РФ), точнее, полосно-задерживающего фильтра.

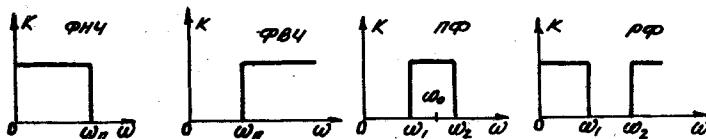


Рис. I.1

Фильтры с идеальными АЧХ физически нереализуемы: ни строго плоская на каком-либо участке, ни разрывная в каких-либо точках АЧХ не может быть осуществлена, так как соответствующая ей импульсная характеристика должна была бы "начинаться" при  $t = -\infty$ .

Реально достижимая АЧХ обязательно должна быть гладкой кривой, без разрывов и без строго горизонтальных участков, в том числе и нулевых. Однако можно получить сколь угодно хорошее приближение к идеальной форме АЧХ.

При сравнении реальной и идеальной АЧХ обычно рассматривают нормированные кривые. По шкале ординат кривые нормируют так, чтобы максимум был равен 1, а по шкале частот — относительно какой-либо характерной точки. Так, для ФНЧ за единицу принимают границу полосы пропускания  $\omega_n$ , для ПФ — центральную частоту полосы пропускания  $\omega_0$ . Таким образом, вводят безразмерную шкалу частот:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (\text{I.1})$$

Отклонение от прямоугольной формы характеризуют тремя безразмерными величинами (рис. I.2):  $\delta_n$  — допустимой неравномерностью в полосе пропускания;  $\delta_3$  — максимально допустимой передачей в полосе задерживания;  $\Omega_3 = \frac{\omega_3}{\omega_n}$  — нижней границей полосы задерживания.

Аналогичные характеристики можно ввести для ПФ и фильтров других типов. Часто в рассмотрение вводят логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ)

$$K(\Omega) = 20 \lg K(\Omega) \text{ дБ} \quad (\text{I.2})$$

или частотную характеристику затухания

$$\alpha(\Omega) = -20 \lg K(\Omega) \text{ дБ.} \quad (\text{I.3})$$

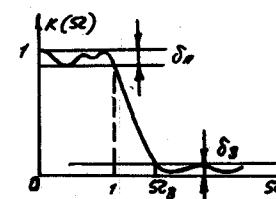


Рис. I.2

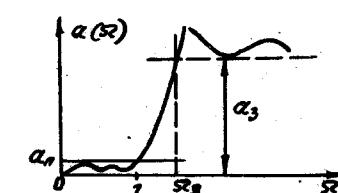


Рис. I.3

На рис. I.3 показана характеристика затухания, соответствующая АЧХ (см. рис. I.2). При использовании логарифмических характеристик вместо параметров  $\delta_n$  и  $\delta_3$  вводят аналогичные им параметры  $\alpha_n$  — допустимое затухание в полосе пропускания и  $\alpha_3$  — минимально допустимое затухание в полосе пропускания. Связь между этими величинами такова:

$$\alpha_n = -20 \lg (1 - \delta_n); \quad (\text{I.4})$$

$$\alpha_3 = -20 \lg \delta_3. \quad (\text{I.5})$$

Некоторые типичные значения этих параметров приведены в табл. I.I

Таблица I.I

$\alpha_n, \text{дБ}$	$\delta_n$	$\epsilon^*$	$\alpha_3, \text{дБ}$	$\delta_3$
0,1	0,011	0,153	20	$10^{-1}$
0,5	0,056	0,349	30	$3,16 \cdot 10^{-2}$
1,0	0,110	0,509	40	$10^{-2}$
2,0	0,210	0,765	50	$3,16 \cdot 10^{-3}$
3,0	0,293	1,000	60	$10^{-3}$

\*  $\epsilon$  - параметр функции  $G(\omega)$  (см. (I.II)).

При постановке задачи синтеза фильтра обычно оговариваются допустимые значения  $\delta_n$ ,  $\delta_3$  (или  $\alpha_n$  и  $\alpha_3$ ) и  $\omega_3$ . Надо иметь в виду, что чем жестче требования, тем сложнее окажется фильтр (выше его порядок, меньше допуски на разброс элементов, труднее настройка). Ослабление любого из требований, с одной стороны, снижает порядок фильтра, а с другой - улучшает некоторые его качества. Например, допустив большую неравномерность в полосе пропускания, можно получить более крутой спад при том же порядке фильтра.

Решение задачи синтеза фильтра можно разбить на два этапа:

1) нахождение передаточной функции  $K(p)$  реализуемого фильтра, обеспечивающего заданные требования к АЧХ (часто этот этап называют этапом аппроксимации);

2) разработка структуры и принципиальной схемы фильтра.

В настоящее время имеется большое число справочной литературы по фильтрам. В ней приводятся исходные данные, по которым можно довольно просто записать искомую передаточную функцию фильтра. Таким образом, первый этап сводится к нахождению в справочнике нужной строки и сравнительно несложному пересчету приведенных исходных данных.

Второй этап значительно сложнее, и, кроме того, он неоднозначен. Одной и той же передаточной функции соответствует множество структур фильтров, основанных на тех или иных схемотехнических идеях и использующих разные элементные базы.

В последующих разделах этой главы рассматриваются некоторые теоретические положения, относящиеся к выбору передаточной функции

или фильтров. При этом не ставится цель дать формулы для самостоятельных расчетов, поскольку они имеются в справочниках. Более важно, на наш взгляд, понять основные закономерности этих расчетов, что позволит осознанно пользоваться справочным материалом.

## I.2. Передаточная функция реализуемого фильтра.

### Функция фильтрации

Условие физической реализуемости фильтра накладывает определенные ограничения на выбор того класса действительных функций, которые могут быть реализованы как АЧХ  $K(\omega)$ .

Проще сформулировать эти ограничения не для АЧХ, а для комплексных функций комплексной переменной  $K(p)$ , которые могут быть реализованы в качестве передаточных функций того или иного фильтра.

Напомним, что передаточная функция любого фильтра, реализуемого на элементах  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и активных элементах, относится к классу дробно-рациональных функций вида

$$K(p) = \frac{\dot{A}(p)}{\dot{B}(p)}, \quad (I.6)$$

где  $\dot{A}(p)$  и  $\dot{B}(p)$  - полиномы переменной  $p$  с действительными коэффициентами.

Условие физической реализуемости накладывает на полином только два ограничения:

1) степень полинома  $\dot{A}(p)$  не должна быть выше степени  $n$  полинома  $\dot{B}(p)$ , где  $n$  - порядок фильтра;

2) корни полинома  $\dot{B}(p)$  или полюсы  $K(p)$  должны лежать в левой полуплоскости  $p$ .

Второе ограничение довольно обременительно при поиске желаемой функции. Однако его можно обойти, если рассматривать не саму функцию  $K(p)$ , а передаточную функцию "по мощности"

$$G(p) = K(p) \cdot K(-p). \quad (I.7)$$

Нетрудно показать, что между особыми точками (полюсами и нулями) функций  $K(p)$  и  $G(p)$  существует простая связь. Каждой особой точке  $K(p)$  соответствуют две особые точки  $G(p)$ , расположенные центрально-симметрично (рис. I.4). Таким образом, класс реализуемых функций  $G(p)$  образуют любые функции, особые точки которых

\* Функция  $G(p)$  является аналитическим продолжением частотной характеристики по мощности  $K_M(\omega) = |K(\omega)|^2$  на плоскость  $p$ , т.е.  $G(p) = K_M(\omega)|_{\omega=p/p_0}$ .

располагаются в "квадрантной симметрии". Полином, определяемый четырьмя квадрантно-симметричными корнями, содержит только четные степени переменной:

$$[p - (\alpha + j\beta)][p - (-\alpha + j\beta)][p - (\alpha - j\beta)][p - (-\alpha - j\beta)] = \\ = p^4 - 2(\alpha^2 - \beta^2)p^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2.$$

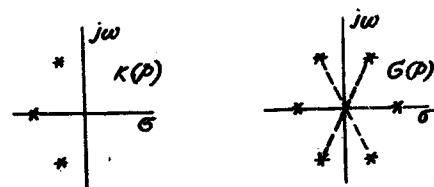


Рис. I.4

Следовательно, класс функций  $G(p)$ , которые могут быть реализованы, включает в себя любые дробно-рациональные функции с действительными коэффициентами вида

$$G(p) = \frac{C(p)}{D(p)}, \quad (I.8)$$

где

$$C(p) = a_0 + a_1 p^2 + a_2 p^4 + \dots + a_m p^{2m}, \quad (I.9)$$

$$D(p) = b_0 + b_1 p^2 + b_2 p^4 + \dots + b_n p^{2n}, \quad m \leq n. \quad (I.10)$$

Итак, по условиям (I.9), (I.10) можно выбрать подходящую функцию  $G(p)$ , найти ее полосы и нули, а затем отбросить половину этих точек, удержав полосы, лежащие только в левой полуплоскости (нули – произвольно). Полученные таким образом особые точки определят передаточную функцию  $K(p)$  заданного фильтра.

Существует и другая возможность плодотворного поиска желаемой функции  $K(p)$ . Оказывается, можно ограничиться поиском только передаточных функций ФНЧ с желаемой формой АЧХ. Если  $K_{\text{нн}}(p)$  найдена, то можно применить некоторое специально подобранное преобразование аргумента  $p \rightarrow p'$ , при котором ФНЧ преобразуется в фильтры других типов: ФВЧ, ПФ, РФ.

Итак, задача стала более определенной: получить желаемую АЧХ, изображенную на рис. I.2, используя функцию  $G(p)$  вида (I.8).

Выбор  $G(p)$  для ФНЧ станет более наглядным, если переписать (I.8) в форме

$$G(p) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F(p)}.$$

При этом класс функций  $F(p)$  остается прежним. Его составляют полиномы или дробно-рациональные функции с членами в четных степенях. Заменив  $p \rightarrow j\Omega$ , перейдем к частотной характеристике по мощности

$$G(\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F(\Omega)}. \quad (I.11)$$

Тогда АЧХ

$$|K(\Omega)| = \sqrt{G(\Omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 F(\Omega)}}, \quad (I.12)$$

полностью будет определяться функцией  $F(\Omega)$ , называемой функцией фильтрации. Реализуемая функция фильтрации – это либо полином, либо дробно-рациональная функция, содержащая только четные степени  $\Omega^2$ .

Из (I.12) видно, какой характер должна носить функция фильтрации для получения хорошей АЧХ ФНЧ: максимуму  $K(\Omega)$  должна соответствовать  $F(\Omega) = 0$  (мы ограничиваемся неотрицательными  $F(\Omega)$ ). В полосе пропускания  $0 \leq \Omega \leq 1$ , она должна оставаться малой (например, не более 1), тогда неравномерность

$K(\Omega)$  будет ограничена выбором коэффициента  $\epsilon^2$ . На границе полосы пропускания  $F(1) = 1$ . В переходной зоне  $1 \leq \Omega \leq \Omega_3$  кривая должна быстро нарастать; в полосе задерживания  $\Omega > \Omega_3$  она должна оставаться достаточно большой (рис. I.5).

Параметр  $\epsilon^2 \leq 1$  в (I.11), (I.12) выбирается таким, чтобы можно было обеспечить допустимую неравномерность в полосе пропускания. При  $\epsilon = 1$  максимальный спад АЧХ составляет

$$|K(\Omega=1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + F(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

или  $\Delta_{\text{нн}} = 3$  дБ.

Для обеспечения меньшей неравномерности следует принять  $\epsilon < 1$  (см. табл. I.1).

Широко известны три "классических" типа фильтров: фильтры Баттервуда, фильтры Чебышева и эллиптические фильтры. Для них составлены подробные справочники.

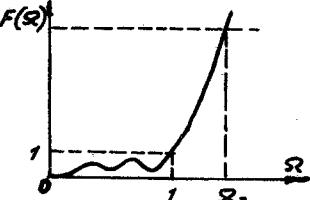


Рис. I.5

\* Есть еще одно ограничение на  $F(\Omega)$ , вытекающее из физического смысла (I.11):  $G(\Omega)$  должна быть неотрицательной.

Фильтры этих трех типов отличаются друг от друга выбором функции фильтрации  $F(\Omega)$ . В первых двух типах в качестве  $F(\Omega)$  выбраны полиномы, а в третьем - дробно-рациональные функции.

### (3) I.3. Фильтры Баттервортса

В фильтре Баттервортса полиномиальная функция фильтрации  $F(\Omega)$  выбирается таким образом, чтобы обеспечивался как можно более плоский участок в области малых частот. Математически это означает, что в полиноме степени  $2n$

$$F_b(\Omega) = a_0 + a_1 \Omega^2 + a_2 \Omega^4 + \dots + a_n \Omega^{2n}$$

коэффициенты нужно определить так, чтобы и сама функция, и максимальное число ее производных были равны нулю при  $\Omega = 0$ . Оказывается, что для этого достаточно выкинуть все члены, кроме последнего. Например, для  $n = 2$

$$F_b(\Omega) = a_0 + a_1 \Omega^2 + a_2 \Omega^4.$$

Производные от функции будут

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\Omega} &= 2a_1 \Omega + 4a_2 \Omega^3; & \frac{d^2F}{d\Omega^2} &= 2a_1 + 12a_2 \Omega^2; \\ \frac{d^3F}{d\Omega^3} &= 24a_2 \Omega; & \frac{d^4F}{d\Omega^4} &= 24a_2. \end{aligned}$$

Выбрав  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ , можно обнулить (при  $\Omega = 0$ ) саму функцию и три ее производные; коэффициент  $a_2 = 1$  взят для того, чтобы  $F_b(1) = 1$ .

Итак, функция фильтрации Баттервортса имеет вид

$$F_b(\Omega) = \Omega^{2n}.$$

Чем выше порядок фильтра  $n$ , тем на большем участке  $F_b(\Omega)$  "прижата" к нулю (рис. I.6). АЧХ фильтра Баттервортса порядка  $n$  будет

$$K(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad (I.13)$$

Вид АЧХ фильтра Баттервортса приведен на рис. I.7. Кривые носят монотонно спадающий характер, причем в полосе пропускания чем выше  $n$ , тем ближе к горизонтали. На границе полосы кривые опускаются до  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $a_n = 3$  дБ), а затем резко падают, особенно при больших  $n$ .

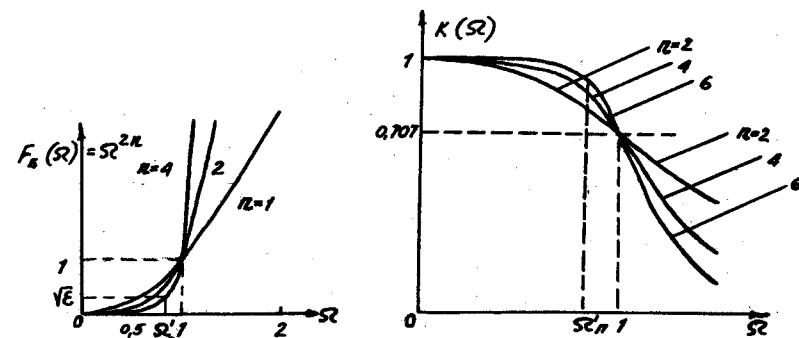


Рис. I.6

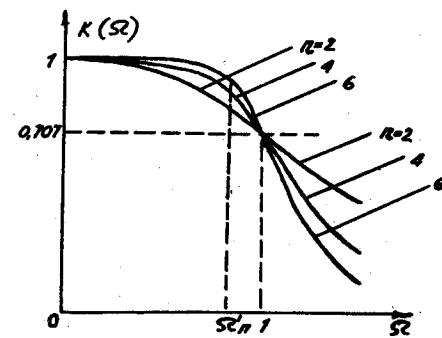


Рис. I.7

Как видно из (I.13), параметр  $\epsilon$  в фильтре Баттервортса обычно не вводится. Если требуется во всей полосе пропускания, вплоть до границы, поддерживать затухание меньше 3 дБ, то это выполняется простым переносом граничной точки, при этом границей считают не  $\Omega = 1$ , а некоторую более низкую частоту  $\Omega_n'$ , где затухание не превышает заданной величины  $a_n$  (или  $F(\Omega_n') = \epsilon^2$ ). (см. рис. I.6 и I.7):

$$\Omega_n' = \sqrt{10^{\frac{2n}{a_n}} - 1}. \quad (I.14)$$

При больших частотах, таких, что  $\Omega^{2n} \gg 1$ , из (I.14) видна асимптотика:

$$|K(\Omega)| \sim \frac{1}{\Omega^n},$$

что соответствует затуханию

$$a(\Omega) = 20 \log \Omega^n = 20n \log \Omega. \quad (I.15)$$

В логарифмическом масштабе шкалы частот это есть линейный закон нарастания (рис. I.8). Говорят, что затухание растет со скоростью  $20n$  дБ на декаду (т.е. при увеличении частоты в 10 раз) или, что то же самое, со скоростью  $6n$  дБ на октаву (т.е. при удвоении частоты).

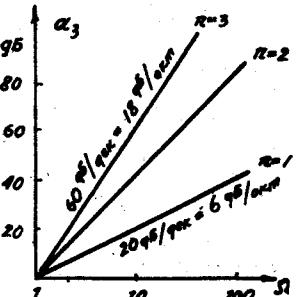


Рис. I.8

#### I.4. Фильтры Чебышева

В этих фильтрах в качестве функции фильтрации используется квадрат полинома Чебышева  $T_n(x)$  степени  $n$ :

$$G(\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad (I.16)$$

Соответственно их АЧХ будет

$$|K(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)}} \quad (I.17)$$

Полиномы Чебышева – это специальные функции, широко используемые во многих приложениях. Их отличительной чертой является то, что на участке  $|x| \leq 1$  они имеют колебательный характер в пределах  $\pm 1$ . На границе, т.е. при  $x = 1$ ,  $T_n(x) = 1$ . При дальнейшем росте  $x$  функции монотонно нарастают, причем тем быстрее, чем выше степень  $n$ . Асимптотически при  $x \gg 1$

$$T_n(x) \approx 2^{n-1} x^n \quad (I.18)$$

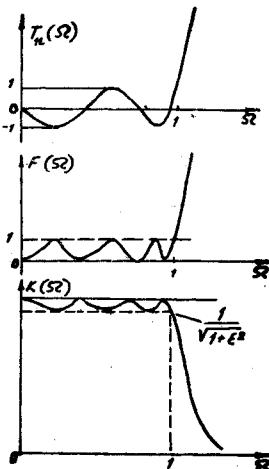


Рис. I.9

Характер спада АЧХ следует из асимптотики  $T_n(x)$  (I.18). При больших частотах

$$a(\Omega) \approx 20 \lg T_n(\Omega) - 20 \lg \frac{1}{\epsilon} = b(n-1) + 20 n \lg \Omega - 20 \lg \frac{1}{\epsilon} \quad (I.20)$$

Скорость нарастания затухания с ростом частоты здесь также равна  $20n$  дБ/дек. Однако, если сравнить фильтры Чебышева (I.20) и Баттерворта (I.15), то видно, что при равной неравномерности в полосе пропускания ( $a_n = 3$  дБ,  $\epsilon = 1$ ) фильтр Чебышева имеет постоянный "выигрыш"  $b(n-1)$  дБ, т.е. его АЧХ в полосе задерживания идет существенно ниже. Если уменьшить допуск на неравномерность в полосе пропускания, то это вызовет снижение затухания на периферии на величину  $20 \lg \frac{1}{\epsilon}$ .

#### (3) I.5. Эллиптические фильтры<sup>хх</sup>

В эллиптических фильтрах в качестве функции фильтрации выбраны квадраты дробей Чебышева  $R_n(x)$ :

$$G(\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\Omega)} ; |K(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 R_n^2(\Omega)}} \quad (I.21)$$

Типичный вид функции  $R_n(x)$ ,  $n=9$ , показан на рис. I.10. В интервале  $|x| \leq 1$  функция  $R_n(x)$  имеет колебательный характер того же типа, что и функция  $T_n(x)$ . Однако дальнейшее ее поведение существенно иное: при  $x > 1$  функция  $R_n(x)$  резко нарастает, стремясь к бесконечности при некотором  $x_{01}$ . Это полюс функции  $R_n(x)$  (и, следовательно, нуль функций  $G(x)$  и  $|K(x)|$ ). В зависимости от порядка  $n$  функция  $R_n(x)$  может иметь еще несколько разрывов ( $x_{02}, x_{03}, \dots$ ). Существенно то, что между точками разрывов функция по модулю никогда не спускается ниже некоторого значения  $R_{min}$ .

Описанное поведение функции  $R_n(x)$  определяет вид АЧХ эллиптических фильтров (рис. I.11). Для них характерны равновеликие пульсации как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания и очень крутой переходной участок.

Дроби Чебышева – обширный класс функций. При данном порядке  $n$  существует не одна дробь  $R_n(x)$  (в отличие от единственного полинома  $T_n(x)$ ), а множество дробей, в котором функции отличаются друг от друга некоторым параметром  $\theta$ <sup>хх</sup>. С увеличением  $\theta$  точка первого

<sup>хх</sup> В литературе эти фильтры называют также фильтрами Кауэра и фильтрами Золотарева.

<sup>хх</sup> При анализе функций фильтрации на основе дробей Чебышева  $R_n(x)$  оказалось удобным представить отношение характерных частот  $\omega_n / \omega_3 = 1 / R_3$  как синус некоторого угла  $\theta$ :  $\sin \theta = 1 / R_3$ . Этот угол принято называть "модульным углом". Помощью этого параметра с использованием эллиптических функций вычисляются все характеристики передаточной функции (отсюда, кстати, и название класса фильтров – эллиптические).

разрыва приближается к I (т.е. крутизна спада АЧХ возрастает). Одновременно уменьшается величина  $R_{min}$  (т.е. пульсации в полосе задерживания увеличиваются).

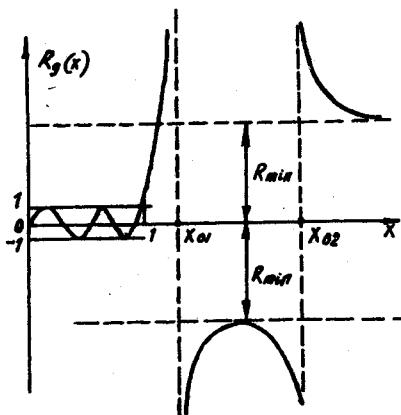


Рис. I.10

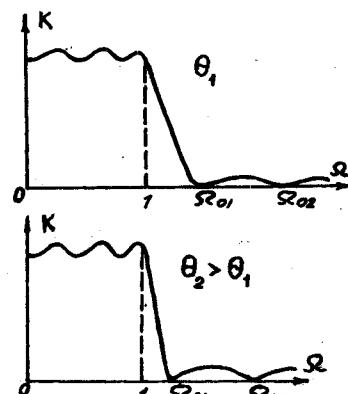


Рис. I.11

Из приведенного сравнительного анализа функций фильтрации, а следовательно, и АЧХ трех рассмотренных типов фильтров, можно отметить их достоинства и недостатки.

Фильтры Баттерворта отличаются самой равномерной (максимально плоской) "вершиной" АЧХ, но сравнительно пологим "срезом". Для получения крутого "среза" необходимо выбирать высокий порядок фильтра.

Фильтры Чебышева дают быстрый спад АЧХ, причем важно, что он идет монотонно. При больших частотах ( $\varUpsilon \gg 1$ ) фильтры Чебышева обеспечивают практически полное подавление помехи. Вершина АЧХ имеет пульсирующий характер. Пульсации могут быть сделаны очень малыми (ценой ухудшения спада в переходной зоне).

Эллиптические фильтры могут обеспечить чрезвычайно крутой переход от полосы пропускания к полосе задерживания. Недостатком их АЧХ является сравнительно слабое подавление помех на высоких частотах.

## I.6. Диаграммы полюсов и нулей "классических" фильтров

Согласно методике, изложенной в разд. I.2, по выбранной частотной характеристике  $G(\varUpsilon)$  можно найти передаточную функцию  $K(p)$ .

Для фильтров Баттерворта выкладки оказываются очень простыми.

Сначала осуществляют переход от  $G(\varUpsilon)$  к передаточной функции по мощности  $G(p)$  заменой  $j\varUpsilon = p$ :

$$G(\varUpsilon) = \frac{1}{1 + \varUpsilon^{2n}} \rightarrow G(p) = \frac{1}{1 + (-1)^n p^{2n}}. \quad (I.22)$$

Функция имеет  $2n$  полюсов. Определим их, приравняв знаменатель к нулю:

$$1 + (-1)^n p^{2n} = 0 \rightarrow p_{1,2,3,\dots,2n} = \sqrt[2n]{1}, \quad n - \text{нечетное}; \\ p_{1,2,3,\dots,2n} = \sqrt[2n]{1}, \quad n - \text{четное}.$$

Имея в виду, что  $i = e^{jk\pi/2n}$ ,  $-i = e^{-j(k\pi/2n)}$ , окончательно получаем:

$$p_k = e^{jk\frac{\pi}{n}}, \quad n - \text{нечетное}; \\ p_k = e^{j(k\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n})}, \quad n - \text{четное}. \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (I.24)$$

Таким образом, все  $2n$  полюсов лежат на единичной окружности в нормированной  $p$ -плоскости, деля ее на равные дуги  $\frac{\pi}{n}$ . Если  $n$  нечетное, то среди полюсов есть два действительных полюса  $p_{1,2} = \pm i$ , а если  $n$  четное, то все полюсы образуют комплексно-сопряженные пары (рис. I.12).

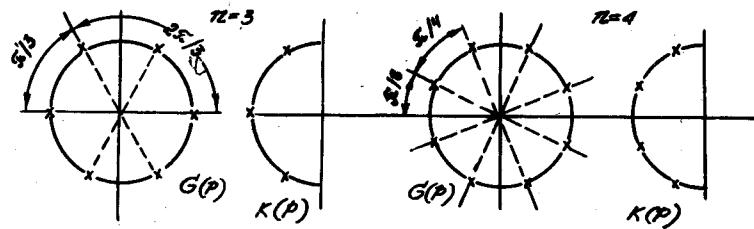


Рис. I.12

Как указывалось выше, полюсы расположены в "квадрантной" симметрии. Оставив половину полюсов, лежащих в левой полуплоскости  $p$ , мы тем самым определим полюсы передаточной функции  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , а следовательно, и саму функцию  $K(p)$  (с точностью до произвольного коэффициента  $k_0$ ):

$$K(p) = \frac{k_0}{\prod_{k=1}^n (p-p_k)}$$

Пример I.1. Найти передаточную функцию фильтра Баттерворта третьего порядка.

Из (I.24), а также из рис. I.12 видно, что

$$p_1 = -1, p_{2,3} = e^{\pm j \frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0.5 \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Передаточная функция

$$K(p) = \frac{1}{(p+1)(p+0.5-j\frac{\sqrt{3}}{2})(p+0.5+j\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

Комплексная частотная характеристика

$$K(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^3 + 2(j\Omega)^2 + 2(j\Omega) + 1} = \frac{1}{(1-2\Omega^2) + j(2\Omega - \Omega^3)}$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$K(\Omega) = |K(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-2\Omega^2)^2 + (2\Omega - \Omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^6}}$$

По такой же методике определяются полюсы фильтров Чебышева, а также полюсы и нули эллиптических фильтров. Однако здесь выкладки значительно более трудоемкие, и поэтому имеет смысл пользоваться не расчетными формулами, а данными справочников, в которых приведены точные результаты.

Полезно иметь представление о диаграмме полюсов фильтров Чебышева и диаграмме полюсов и нулей эллиптических фильтров, а также о том, как изменение конфигурации диаграммы влияет на изменение АЧХ.

На рис. I.13 в качестве примера представлено несколько диаграмм полюсов фильтров Чебышева и приведены соответствующие им АЧХ. Полюсы расположены на эллипсе. В зависимости от порядка  $n$  и заданной неравномерности в полосе пропускания  $\alpha_n$  (или параметра  $\epsilon$ ) размеры эллипса изменяются. При фиксированном  $n$  "расширение" эллипса приводит к уменьшению пульсаций в полосе пропускания и более пологому срезу АЧХ (см.  $a$  и  $b$  на рис. I.13). При фиксированном  $\alpha_n$  размеры эллипса тем больше, чем ниже порядок  $n$  (см.  $c$  и  $d$  на рис. I.13).

Диаграмма полюсов и нулей эллиптического фильтра зависит не только от  $n$  и  $\alpha_n$ , но и от модульного угла  $\theta$  (см. примеры, при-

веденные на рис. I.14). Группа полюсов расположена почти так же, как полюсы фильтра Чебышева (по крайней мере, при малых  $\theta$ ). Нули лежат на мнимой оси в некоторых точках  $\Omega_{o1}, \Omega_{o2}, \dots$ , в которых  $K(\Omega) = 0$ . Число нулей меньше числа полюсов. При увеличении параметра  $\theta$  частота первого нуля  $\Omega_{o1}$  уменьшается, одновременно несколько изменяется положение полюсов. В АЧХ при том же  $\alpha_n$  увеличивается крутизна среза, но возрастают пульсации  $\alpha_s$  в зоне задерживания. Влияние конфигурации полюсов и нулей на характер АЧХ становится более понятным, если рассмотреть вклад каждого отдельного полюса и нуля в АЧХ.

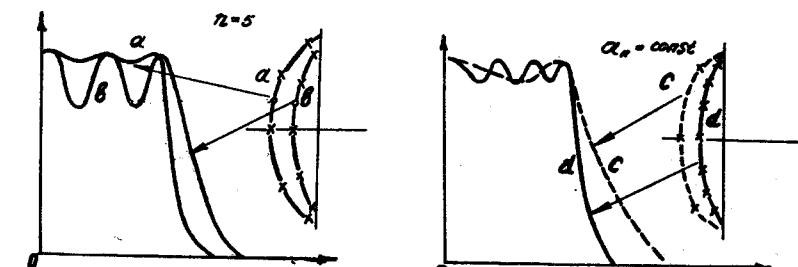


Рис. I.13

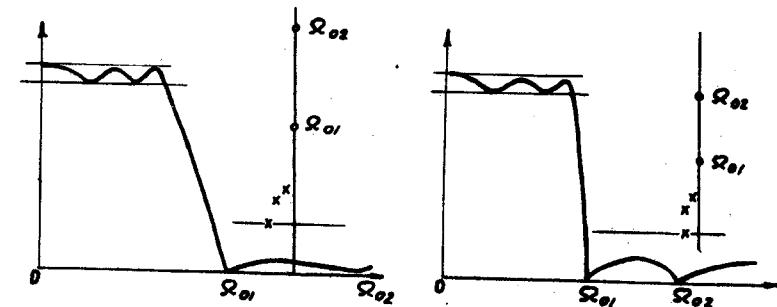


Рис. I.14

Запишем выражение для передаточной функции по заданным полюсам  $p_{n1}, p_{n2}, \dots$  и нулям  $\rho_{o1}, \rho_{o2}, \dots$ :

$$K(p) = \frac{(p-p_{o1})(p-p_{o2}) \dots}{(p-p_{n1})(p-p_{n2}) \dots}$$

Перейдем к комплексной частотной характеристике ( $p \rightarrow j\Omega$ ) и ее модулю:

$$|K(\mathcal{R})| = \frac{|j\mathcal{R} - p_{o1}| |j\mathcal{R} - p_{o2}| \dots}{|j\mathcal{R} - p_n| |j\mathcal{R} - p_{n2}| \dots} \quad (I.25)$$

Каждая скобка в числителе и знаменателе представляет собой длину вектора, проведенного из особой точки  $p_n$  или  $p_o$  в текущую точку  $j\mathcal{R}$  мнимой оси (рис. I.15):

$$K(\mathcal{R}) = \frac{Q_1(\mathcal{R}) Q_2(\mathcal{R}) \dots}{R_1(\mathcal{R}) R_2(\mathcal{R}) \dots} \quad (I.26)$$

Вклад в АЧХ отдельного нуля или полюса ("парциальная" АЧХ) определяется тем, как изменяются с частотой длины этих векторов:

$$K'_n(\mathcal{R}) = \frac{1}{R_n(\mathcal{R})}; \quad K'_o(\mathcal{R}) = Q(\mathcal{R}). \quad (I.27)$$

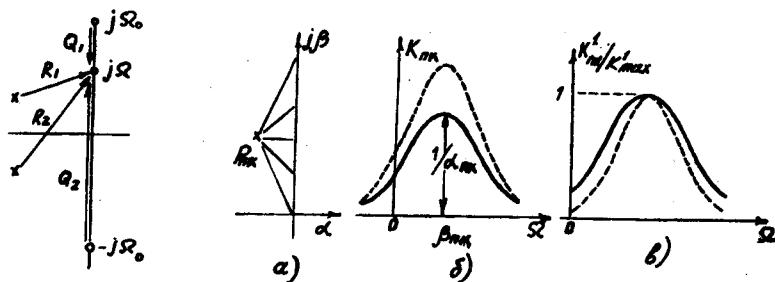


Рис. I.15

Рис. I.16

На рис. I.16 показана парциальная АЧХ, связанная с  $k$ -м полюсом  $p_{nk} = \alpha_{nk} + j\beta_{nk}$  (рис. I.16, а). Она резонансного типа с максимумом в точке  $\mathcal{R} = \beta_{nk}$  (рис. I.16, б). Величина максимума  $K'_{max} = \frac{1}{\alpha_{nk}}$  тем больше, чем ближе полюс к мнимой оси (на рис. I.16, б пунктир соответствует смещению полюса ближе к мнимой оси). Характер спада кривой при большом удалении  $\mathcal{R}$  от  $\beta_{nk}$  не зависит от  $\alpha_{nk}$  и является гиперболическим  $K'_{nk}(\mathcal{R}) \sim \frac{1}{\mathcal{R}^2}$ . Однако, если пронормировать кривую по ее максимуму, вывод будет другой: чем ближе полюс к мнимой оси, тем круче (относительно) спадает парциальная АЧХ (рис. I.16, в), тем больше затухание в зоне задерживания.

Рассмотрим АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева третьего порядка как произведения трех парциальных АЧХ (рис. I.17). Три полюса фильтра Баттерворта, расположенные на окружности, создают

три разнесенные резонансные кривые (рис. I.17, б): центральную – более широкую и низкую и две боковые – более высокие и узкие. Оказывается, что ширина и взаимное расположение их подобраны так, что при перемножении получается выровненная результирующая АЧХ (рис. I.17, в).

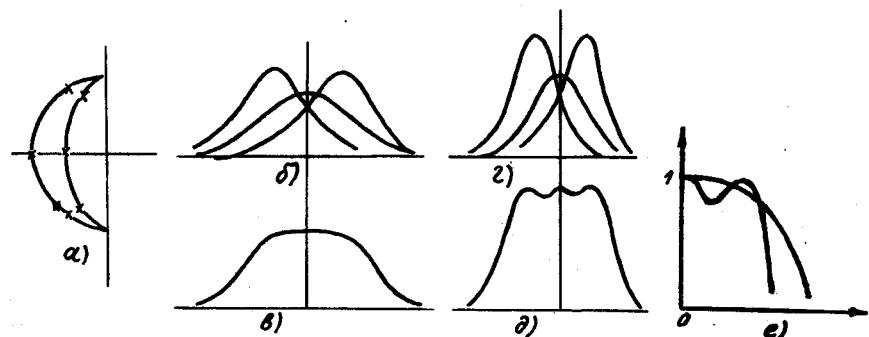


Рис. I.17

Полюсы фильтра Чебышева приближены к мнимой оси (рис. I.17, а). Соответствующие парциальные АЧХ более высокие и относительно более узкие (рис. I.17, г). Их произведение дает неполностью выровненную АЧХ – остаются пульсации (рис. I.17, д), которые тем больше, чем уже эллипс. Характер спада АЧХ на больших частотах не зависит от расположения полюсов и определяется только их числом. В данном случае  $K(\mathcal{R}) \sim \frac{1}{\mathcal{R}^3}$ . Таким образом, кривые, показанные на рис. I.17, в и д, имеют одинаковые "хвосты" (затухание растет со скоростью 20 л дБ/дек). Однако, если обе кривые пронормировать по их максимумам (рис. I.17, е), то АЧХ фильтра Чебышева будут иметь более крутой спад.

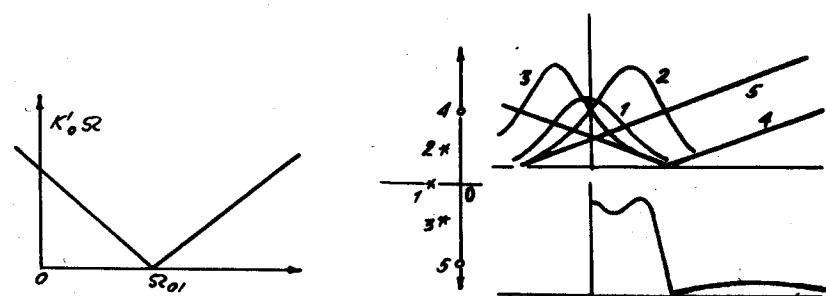


Рис. I.18

Рис. I.19

Парциальные характеристики, связанные с нулями эллиптических фильтров, - это линейно-ломаные зависимости (рис. I.18). Их вклад в результирующую АЧХ очевиден (рис. I.19, где цифрами I-5 обозначены полюсы и нули и соответствующие им парциальные АЧХ). Отметим, что при  $\Omega \rightarrow \infty$  кривая спадает как  $1/\Omega^{n-m}$ , где  $m$  - число нулей.

### I.7. Как пользоваться справочниками по фильтрам

В справочниках (например, в [I-3]) приведены полные таблицы исходных данных для записи передаточных функций фильтров Баттервортса, Чебышева и эллиптических. Все данные относятся к "базовым" функциям, т.е. к передаточным функциям фильтров НЧ в нормированной (безразмерной)  $p$ -плоскости.

Для полиномиальных фильтров (Баттервортса и Чебышева) приводятся либо координаты полюсов

$$\rho_k = \alpha_k \pm j\beta_k, \quad (I.28)$$

либо коэффициенты полинома-знаменателя  $B_k, C_k$ . Эти данные позволяют сразу записать их базовые передаточные функции:

$$K(p) = k_0 \prod_k \frac{1}{p - \rho_k}; \quad (I.29)$$

$$K(p) = k_0 \left( \prod_k \frac{1}{p^2 + B_k p + C_k} \right) \frac{1}{p + B'}, \quad (I.30)$$

где  $k_0$  - произвольный коэффициент (его можно использовать для нормировки АЧХ).

В записи (I.30) передаточная функция представлена как произведение передаточных функций звеньев второго порядка и одного звена первого порядка, если порядок фильтра нечетный. Для эллиптических фильтров добавляются еще и координаты нулей

$$\rho_{nk} = \pm j \Omega_{nk}, \quad (I.31)$$

или указываются не два, а три коэффициента:  $A_k, B_k, C_k$ .

Базовые передаточные функции эллиптических фильтров записываются соответственно так:

$$K(p) = k_0 \prod_k \frac{p - \rho_{nk}}{p - \rho_k}; \quad (I.32)$$

$$K(p) = k_0 \left( \prod_k \frac{p^2 + A_k}{p^2 + B_k p + C_k} \right) \frac{1}{p + B'}, \quad (I.33)$$

Сопоставим записи передаточных функций одного звена второго порядка через координаты, через коэффициенты, а также через параметры звена  $LCR$  (рис. I.20).

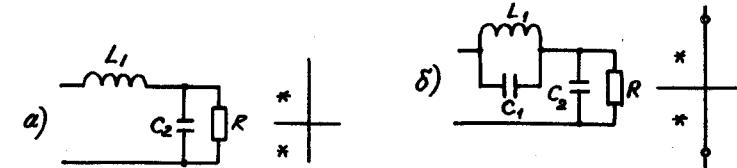


Рис. I.20

Для фильтра только с полюсами

$$K(p) = \frac{k_0}{(p - \alpha_k - j\beta_k)(p - \alpha_k + j\beta_k)} = \frac{k_0}{p^2 - 2\alpha_k p + (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}; \quad (I.34)$$

$$K(p) = \frac{k_0}{p^2 + B_k p + C_k}; \quad (I.35)$$

$$K(p) = \frac{\frac{1}{L_1 C_2}}{p^2 + \frac{1}{C_2 R} p + \frac{1}{L_1 C_2}} = \frac{\omega_p^2}{p^2 + \frac{Q}{\omega_p} p + \omega_p^2}. \quad (I.36)$$

В записи (I.36) использованы обобщенные параметры звена - резонансная частота  $\omega_p$  и добротность  $Q$ :

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}; \quad Q = \frac{R}{\omega_p}; \quad \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}. \quad (I.37)$$

Для фильтра с полюсами и нулями

$$K(p) = \frac{k_0 (p - j\Omega_{nk})(p + j\Omega_{nk})}{(p - \alpha_k - j\beta_k)(p - \alpha_k + j\beta_k)} = \frac{k_0 (p^2 + \Omega_{nk}^2)}{p^2 - 2\alpha_k p + (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}; \quad (I.38)$$

$$K(p) = \frac{k_0 (p^2 + A_k)}{p^2 + B_k p + C_k}; \quad (I.39)$$

$$K(p) = \frac{\frac{C_1}{C_\varepsilon} \left( p^2 + \frac{1}{L_1 C_1} \right)}{p^2 + \frac{1}{R C_\varepsilon} p + \frac{1}{L_1 C_\varepsilon}} = \frac{\frac{C_1}{C_\varepsilon} (p^2 + \omega_0^2)}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q} p + \omega_p^2}; \quad (I.40)$$

$$C_\varepsilon = C_1 + C_2; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_\varepsilon}}; \quad Q = \frac{R}{\omega_p}; \quad \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_\varepsilon}}. \quad (I.41)$$

Из сопоставления (I.34)-(I.41) прослеживается смысл коэффициентов. Резонансной частоте звена  $\omega_p$  соответствуют выражения

$$\omega_p = \sqrt{C_k} = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} = r_k, \quad (I.42)$$

где  $r_k$  - радиус (или модуль) полюса.

Добротность звена

$$Q = \frac{\sqrt{C_k}}{\alpha_k} = \frac{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}{-2\alpha_k} = -\frac{\gamma_k}{2\alpha_k}. \quad (I.43)$$

Равенство (I.43) дает основание ввести термин добротность полосы  $g_k$ :

$$g_k = \frac{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}{2|\alpha_k|} = \frac{\gamma_k}{2|\alpha_k|}. \quad (I.44)$$

Добротность полосы тем больше, чем ближе он находится к оси  $j\omega$  и чем выше он расположен. Частота режекции  $\omega_0$  определяется координатой нуля или коэффициентом  $A_k$ :

$$\omega_0 = R_{ak} - \sqrt{A_k}. \quad (I.45)$$

Формулы (I.42), (I.43) и (I.45) позволяют перейти от одной формы записи табличных данных ( $\alpha_k, \beta_k, R_{ak}$ ) к другой ( $A_k, B_k, C_k$ ).

Для звена первого порядка единственный полюс  $p_1 = -\alpha_1$  и один коэффициент  $B'$  связаны простым соотношением

$$B' = -\alpha_1. \quad (I.46)$$

Итак, для записи базовой передаточной функции по справочным данным достаточно подставить их в (I.29), (I.30) или (I.32), (I.33).

Пример I.2. Фильтр Чебышева третьего порядка с неравномерностью  $A_n = 0,5$  дБ задается координатами трех полюсов:

$$p_1 = -0,626, p_{2,3} = -0,313 \pm j1,022.$$

Базовая передаточная функция

$$K(p) = k_0 \frac{1}{p+0,626} \frac{1}{p^2+2 \cdot 0,313p+(0,313^2+1,022^2)} = \\ = \frac{k_0}{p^3+1,242p^2+1,528p+0,715}$$

Пример I.3. Эллиптический фильтр с  $n = 3$ ,  $A_n = 1$  дБ,  $A_3 = 30$  дБ в справочнике задан коэффициентами:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3,871 & 0,411 & 1,016 \\ - & 0,560 & - \end{array}$$

Базовая передаточная функция

$$K(p) = \frac{k_0}{p+0,560} \frac{p^2+3,871}{p^2+0,411p+1,016}$$

Звено второго порядка, входящее в фильтр, имеет следующие параметры: частоту режекции  $R_o = \sqrt{3,871} = 1,97$ ; частоту резонанса  $\omega_p = \sqrt{1,016} = 1,008$ ; добротность  $Q = \frac{1,008}{0,411} = 2,45$ .

При поиске исходных данных в справочнике надо иметь в виду, что все они упорядочены по возрастанию порядка фильтра  $n$  и величины затухания  $A_n$  (т.е. по допустимой неравномерности в полосе пропускания).

Для фильтров Баттерворта в некоторых справочниках даются таблицы только с указанием порядка  $n$  (без задания  $A_n$ ). В этом случае предполагается, что граничная частота  $R_{n1} = 1$  определена по спаду 0,707 ( $A_n = 3$  дБ). При других значениях  $A_n$  следует лишь снизить граничную частоту (I.14).

Для нахождения табличных данных фильтра Чебышева необходимо знать как  $n$ , так и  $A_n$ .

Для эллиптических фильтров введено также упорядочивание по значению параметра  $\sigma$  (модульного угла) или однозначно связанного с ним затухания  $A_3$ .

Выдержки из справочных таблиц даны в приложении.

Мы рассмотрели, как получить базовую функцию  $K(p)$ , если известны тип фильтра и его параметры ( $n, A_n, A_3$ ). Часто при проектировании не задаются заранее тип фильтра и его порядок. Известно лишь, что требуется обеспечить заданную неравномерность  $A_n$  в полосе  $0 \dots \omega_n$  и заданное затухание  $A_3$  в полосе  $\omega \geq \omega_3$ . При этом тип фильтра может быть любым, а порядок его — по возможности наименьшим. Прежде чем искать в справочнике данные для базовой функции  $K(p)$ , нужно оценить порядок фильтра  $n$ , который обеспечивал бы все три заданные величины:  $A_n, A_3, R_3 = \frac{\omega_3}{\omega_n}$ .

Обычно в начале справочника приводятся графики (номограммы), позволяющие провести такую оценку. Форма номограмм в разных справочниках неодинаковая. Одна из наиболее удобных номограмм показана на рис. I.21. Слева имеются две шкалы:  $A_n$  и  $A_3$  (в децибелах). Отложив на них заданные величины (например,  $A_n = 1$ ,  $A_3 = 30$ ), проведем прямую линию до пересечения со шкалой  $R_3$ . По шкале  $R_3$  отло-

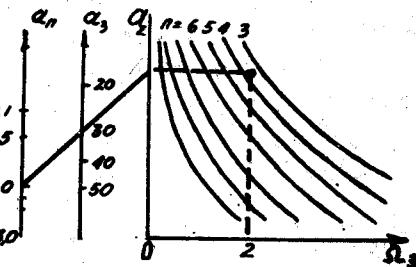


Рис. I.21

жим заданную величину (например,  $A_3 = 2$ ). Точка графика оказалась между линиями  $n = 3$  и  $n = 4$ . Это говорит о том, что фильтр данного типа (график соответствует определенному типу фильтра) следует взять четвертого порядка.

В других nomogramмах вспомогательная величина  $A_x$ , определяемая обими заданными затуханиями  $A_n$  и  $A_3$ , находится как их сумма:  $A_x = A_3 + \alpha A$ . Добавочное затухание  $\alpha A$  определяется по таблице:

$A_n, \text{дБ}$	3	1	0,5	0,2	0,1
$\alpha A, \text{дБ}$	0	5,6	9	13	22,5

Из таблицы хорошо виден смысл суммарного параметра  $A_x$ : если задать неравномерность 3 дБ, то  $\alpha A = 0$ ; получение меньшей неравномерности, например 0,5 дБ, эквивалентно повышению затухания  $A_3$  на 9 дБ.

#### I.8. Преобразование базовой передаточной функции в передаточную функцию реального ФНЧ

Как уже отмечалось выше, по базовой функции  $K(p)$  можно найти передаточные функции фильтров любого вида (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) с конкретными значениями характерных частот.

Проще всего эта задача решается для ФНЧ, где нужно лишь восстановить размерность шкалы частот: вместо безразмерной плоскости  $p = \omega + j\beta$  ввести в рассмотрение плоскость  $p' = \omega' + j\omega$ , соответствующую реальной шкале частот.

Поскольку нормирование шкалы частот проводилось делением на величину граничной частоты полосы пропускания  $\omega_n$ , то обратная операция – денормирование – это просто умножение на  $\omega_n$ .

Денормирование можно провести как по полосам и нулям:

$$p'_k = G_k + j\omega_k = \alpha_k \omega_n + j\beta \omega_n,$$

так и сразу по передаточной функции, выраженной через коэффициенты

$$K(p) = \frac{p^2 + A_k}{p^2 + \theta_k p + C_k} = K_{nn}(p') = \frac{(p')^2 + \omega_n^2 A_k}{(p')^2 + \omega_n \theta_k p' + \omega_n^2 C_k}. \quad (I.47)$$

Обратите внимание на то, что коэффициент  $\theta_k$  умножается на  $\omega_n$  а коэффициенты  $A_k$  и  $C_k$  – на  $\omega_n^2$  (при этом размерности всех членов одинаковы!).

Пример I.4. Определить передаточную функцию фильтра Чебышева при  $n = 3$ ,  $A_n = 0,5 \text{ дБ}$ ,  $f = 1000 \text{ Гц}$ . Коэффициент передачи  $K(0) = 10$  при  $\omega = 0$ .

Это фильтр, рассмотренный в примере I.2. Произведем денормирование полосов и нулей:

$$p = -2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,494; p_{2,3} = (-0,247 \pm j0,966) \cdot 2\pi \cdot 10^3.$$

Можно воспользоваться уже вычисленной базовой функцией, восстанавливая размерность  $[\omega^3]$  каждого члена:

$$K(p) = \frac{k_0}{p^3 + 2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,988 p^2 + (2\pi \cdot 10^3)^2 \cdot 1,238 p + (2\pi \cdot 10^3)^3 \cdot 0,4911}.$$

Из условия  $K(0) = 10$  найдем значение коэффициента  $k_0$ :

$$K(0) = \frac{k_0}{(2\pi \cdot 10^3)^3 \cdot 0,4911} = 10 \rightarrow k_0 = 4,911 \cdot (2\pi \cdot 10^3)^3.$$

Пример I.5. Определить передаточную функцию эллиптического фильтра с граничной частотой  $\omega_n = 10^3$ ,  $n = 3$ ,  $A_n = 1 \text{ дБ}$ ,  $A_3 = 35 \text{ дБ}$ ,  $K(0) = 1$ .

Это фильтр, рассмотренный в примере I.3. Произведем денормирование:

$$K(p) = \frac{k_0}{p + 0,538 \cdot 10^3} \cdot \frac{p^2 + 5,351 \cdot 10^6}{p^2 + 0,436 \cdot 10^3 p + 1,01 \cdot 10^6}.$$

При нулевой частоте

$$K(0) = \frac{k_0}{0,538 \cdot 10^3} \cdot \frac{5,351 \cdot 10^6}{1,01 \cdot 10^6} = 1 \rightarrow k_0 \approx 100.$$

Фильтр состоит из  $RC$ -звена с постоянной времени  $T = \frac{1}{0,538 \cdot 10^3} = 1,86 \text{ мс}$  и звена второго порядка (см. рис. I.20, б) с параметрами  $\omega_0 = 2,31 \cdot 10^3$ ,  $\omega_p = 1,005 \cdot 10^3$  и  $Q = 2,3$ .

#### I.9. Частотные преобразования. Переход к фильтрам ФВЧ, ПФ, РФ

Для пересчета базовой передаточной функции ФНЧ в передаточные функции фильтров других видов (ФВЧ, ПФ, РФ) целесообразно воспользоваться некоторыми специально подобранными частотными преобразованиями, связывающими исходную нормированную  $p$ -плоскость базовой функции с новой, также нормированной  $p'$ -плоскостью (для фильтра другого типа). Затем для получения передаточной функции реального фильтра надо произвести денормирование с учетом того, какая именно частота принималась за единицу в  $p'$ -плоскости.

Преобразование ФНЧ в ФВЧ. В данном случае используется следующее преобразование:

$$P' = \frac{1}{P} \quad (I.48)$$

Шкала частот преобразуется аналогично<sup>x</sup>:

$$\Omega' = \frac{1}{\Omega} \quad (I.49)$$

На рис. I.22 показана трансформация АЧХ эллиптического фильтра при таком преобразовании. Все характерные точки  $\Omega_p$  и  $\Omega_o$  переходят в точки  $\Omega'_p$  и  $\Omega'_o$  в соответствии с (I.49).

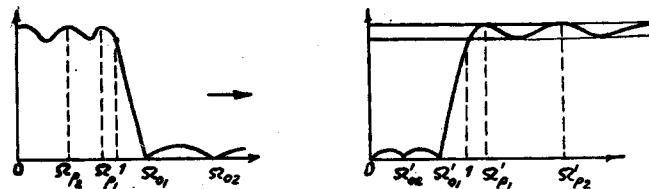


Рис. I.22

Нули и полюсы базовой передаточной функции также пересчитываются по формулам (I.48) и (I.49). Однако надо иметь в виду, что при частотном преобразовании (I.48) пересчет каждого полюса сопровождается появлением нуля  $P'_n = 0$ , а пересчет каждого нуля – появлением полюса  $P'_n = 0$ . Это видно из следующей подстановки:

$$K(p) = \frac{k_o}{p - p_n} \rightarrow K(p') = \frac{k_o}{\frac{1}{p'} - p_n} = \frac{k_o p'}{\frac{1}{p'} - p_n} = \frac{k'_o p'}{p' - p'_n} \quad (I.50)$$

Наличие переменной  $p'$  в числителе говорит о появлении в диаграмме полюсов-нулей кроме точки  $p'_n$  еще и точки  $p'_n = 0$ .

Передаточные функции звеньев второго порядка только с полюсами трансформируются так:

$$K(p) = \frac{k'_1}{(p - p_k)(p - p_k^*)} \rightarrow K(p') = \frac{k'_1 (p')^2}{(p' - p'_k)(p' - p'^*_k)} \quad (I.51)$$

$$K(p) = \frac{k'_1}{p^2 + Bp + C} \rightarrow K(p') = \frac{k'_1 (p')^2}{(p')^2 + B'p' + C'} \quad (I.52)$$

где

<sup>x</sup>Точнее,  $\Omega' = -\frac{1}{\Omega}$ , но в силу симметрии (комплексной сопряженности пар нулей и полюсов) знак можно не учитывать.

$$P'_k = \frac{1}{p_k}; k' = \frac{k_1}{p_k^2} = \frac{k_1}{C}; C' = \frac{1}{C}; B' = \frac{B}{C} \quad (I.53)$$

Звенья с полюсами и нулями переходят также в звенья с полюсами и нулями:

$$K(p) = \frac{k_1(p^2 + \Omega_o^2)}{(p - p_k)(p - p_k^*)} \rightarrow K(p') = \frac{k'_1((p')^2 + (\Omega'_o)^2)}{(p' - p'_k)(p' - p'^*_k)}; \quad (I.54)$$

$$K(p) = \frac{k_1(p^2 + A)}{p^2 + Bp + C} \rightarrow K(p') = \frac{k'_1((p')^2 + \frac{1}{A})}{(p')^2 + \frac{B}{C}(p') + \frac{1}{C}}. \quad (I.55)$$

Здесь  $p'_k$  и  $\Omega'_o$  пересчитаны по (I.48) и (I.49), а  $k'_1 = k_1 \frac{A}{C}$ .

Преобразование ФНЧ в ПФ. В данном случае используется преобразование

$$p = q \left( p' + \frac{1}{p'} \right). \quad (I.56)$$

Параметр преобразования  $q$  – это некоторая эквивалентная добродотность полосового фильтра, т.е. отношение центральной частоты (принимаемой за единицу) к полосе пропускания:

$$q = \frac{1}{\Delta \Omega'} \quad (I.57)$$

Оси частот  $p = j\Omega$ ,  $p' = j\Omega'$  связаны преобразованием

$$p = q \left( \Omega' - \frac{1}{\Omega'} \right). \quad (I.58)$$

Разрешив (I.58) относительно  $\Omega'$ , получим

$$\Omega'_\pm = \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{4q^2} \pm \frac{\Omega}{2q}}. \quad (I.59)$$

Таким образом, некоторая точка исходной шкалы частот  $\Omega$  преобразуется в две точки новой шкалы  $\Omega'_+$  и  $\Omega'_-$ , лежащие выше и ниже нормирующей частоты  $\Omega' = 1$ . Нетрудно проверить (из (I.59)), что имеет место симметрия

$$\Omega'_+ \Omega'_- = 1. \quad (I.60)$$

На рис. I.23 показана трансформация АЧХ. Точка  $\Omega = 0$  переходит в  $\Omega' = 1$ . Граница полосы пропускания ФНЧ  $\Omega_n = 1$  преобразуется в две точки:  $\Omega'_{n+}$  и  $\Omega'_{n-}$  – верхнюю и нижнюю границы полосы пропускания ПФ. Разность между ними есть полоса пропускания

$$\Delta \Omega' = \Omega'_{n+} - \Omega'_{n-}, \quad (I.61)$$

определенная параметр преобразования  $q$  (I.57). Надо отметить, что центральная частота  $\Omega' = 1$  находится не на равном расстоянии от границ, так как (см. (I.60))

$$\Omega'_{n+} - 1 \neq 1 - \Omega'_{n-}, \quad \Omega'_{n+} = \frac{1}{\Omega'_{n-}}. \quad (I.62)$$

Однако при больших  $q$  эта несимметрия очень мала:

$$\Omega'_{n+} \approx 1 + \frac{1}{2q}, \quad \Omega'_{n-} \approx 1 - \frac{1}{2q}.$$

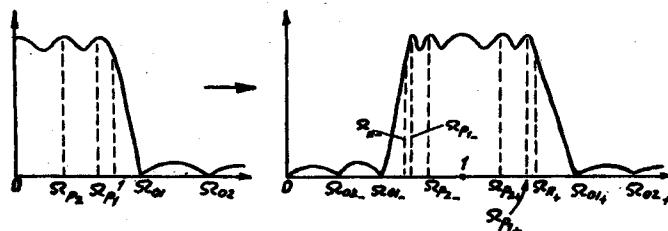


Рис. I.23

В целом АЧХ полосового фильтра в своей "верхней" части повторяет в немногом деформированном виде АЧХ ФНЧ. "Нижняя" полоса частот не является строго "зеркальной" по отношению к "верхней". Заметим, что если построить АЧХ в логарифмической шкале частот, то она окажется строго симметричной относительно  $\Omega' = 1$ .

На рис. I.24 показано преобразование полюсов. Как видно из рисунка, конфигурация полюсов приблизительно сохраняется, но они переносятся из района начала координат в район  $p' \approx j \cdot 1$  (и  $-j \cdot 1$ ).

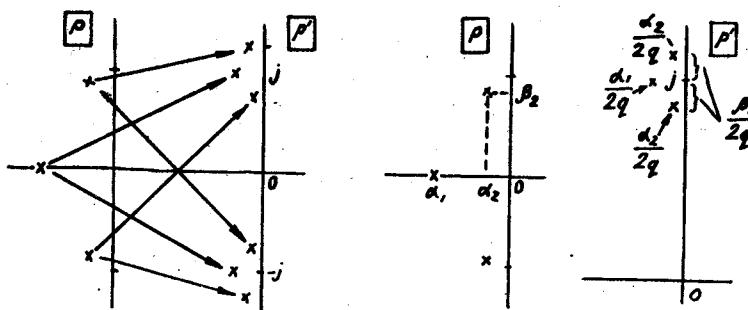


Рис. I.24

Рис. I.25

Если фильтр сравнительно узкополосен ( $q > 5$ ), пересчет полюсов оказывается очень простым: все размеры (рис. I.25) уменьшаются в отношении  $\frac{1}{2q}$ :

$$p_k = -\alpha_k + j\beta_k \rightarrow p'_{k\pm} \approx -\frac{\alpha_k}{2q} \pm j \frac{\beta_k}{2q} + j. \quad (I.63)$$

Если  $q$  невелико ( $q < 5$ ), для пересчета следует использовать более точные формулы:

$$\alpha'_\pm = \frac{\alpha}{2q} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \epsilon^2}{2}}, \quad \beta'_\pm = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \epsilon^2}{2}} \pm \frac{\beta}{2q}, \quad (I.64)$$

где

$$\epsilon = \left(\frac{\alpha}{2q}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2q}\right)^2 - 1; \quad \alpha = \sqrt{\epsilon^2 + \beta^2}; \quad \beta = 2 \frac{\alpha}{2q} \frac{\beta}{2q}.$$

Итак, преобразование (I.56) позволяет по известной диаграмме полюсов и нулей базовой функции НЧ найти диаграмму полюсов и нулей передаточной функции полосового фильтра с нормированной шкалой частот относительно центральной частоты.

При преобразовании звеньев только с полюсами появляются дополнительные нули  $p'_k = 0$ , как и в случае ФНЧ.

Звено первого порядка трансформируется в звено второго порядка с двумя полюсами и одним нулем:

$$K(p) = \frac{k_1}{p - p_k} \rightarrow K(p') = \frac{k'_1 p'}{(p' - p'_{k+})(p' - p'_{k-})}. \quad (I.65)$$

Звено второго порядка превращается в звено четвертого порядка с двукратным нулем:  $k'_1 (p')^2$

$$K(p') = \frac{k'_1 (p')^2}{(p' - p'_{k+})(p' - p'_{k-})(p' - p'_{k+}^*)(p' - p'_{k-}^*)}. \quad (I.66)$$

Звено второго порядка с полюсами и нулями переходит в звено четвертого порядка с четырьмя полюсами и четырьмя нулями.

Координаты полюсов можно найти по (I.63) или (I.64), а нулей — по (I.59).

Можно также воспользоваться пересчетом звеньев, заданных коэффициентами  $A, B, C$ <sup>\*</sup>:

$$K(p) = \frac{k_1}{p + B} \rightarrow K(p) = \frac{\frac{k_1}{q} p}{p^2 + \frac{\beta}{q} p + 1}; \quad (I.67)$$

\* Для простоты записи штрих у новой переменной  $p$  опускаем.

$$K(p) = \frac{k_1}{p^2 + Bp + C} \rightarrow K(p) = \frac{k_1}{q^2} \frac{p}{p^2 + EDp + D^2} \frac{p}{p^2 + \frac{E}{D}p + \frac{1}{D^2}}, \quad (I.68)$$

где коэффициенты  $E$  и  $D$  определяются через  $B$  и  $C$ . При узкополосных фильтрах ( $q \gg 1$ ) эта связь выражается следующим образом:

$$E \approx \frac{B}{2q}; \quad D \approx 1 + \frac{1}{2q} \sqrt{C - \left(\frac{B}{2}\right)^2}. \quad (I.69)$$

Звено второго порядка общего вида переходит в два звена второго порядка того же вида:

$$K(p) = \frac{p^2 + A}{p^2 + Bp + C} \rightarrow K(p) = \frac{p^2 + A_1}{p^2 + EDp + D^2} \frac{p^2 + \frac{1}{A_1}}{p^2 + \frac{E}{D}p + \frac{1}{D^2}}. \quad (I.70)$$

Коэффициент  $A_1$  определяется так:

$$A_1 = 1 + \frac{1}{2q} (A + \sqrt{A^2 + 4Aq^2}). \quad (I.71)$$

Сравним (I.67), (I.68) с передаточной функцией параллельного резонансного  $\mathcal{LC}$ -контура:

$$K(p) = \frac{k_{p\phi_3} \frac{\omega_p}{q} p}{p^2 + \frac{\omega_p}{q} p + \omega_p^2}. \quad (I.72)$$

Из (I.72) видно, что передаточная функция (I.67) соответствует контуру, настроенному на центральную частоту  $\bar{\rho} = 1$  и имеющему добротность  $Q_1$ :

$$\bar{\rho}_{p_1} = 1, \quad Q_1 = \frac{q}{\bar{\rho}}.$$

Выражение (I.68) соответствует каскадному включению двух контуров с настройкой выше и ниже центральной частоты:

$$\bar{\rho}_{p_2} = D; \quad \bar{\rho}_{p_3} = \frac{1}{D}$$

и одинаковыми добротностями:

$$Q_2 = Q_3 = \frac{1}{E}.$$

Переход от нормированных по частоте передаточных функций (I.67)–(I.70) к действительным передаточным функциям ПФ сводится к восстановлению размерности, т.е. к умножению на нормирующую частоту  $\omega_0$  (для коэффициента  $D$ ) или на ее квадрат  $\omega_0^2$  (для  $A_1$ ).

Пример I.6. Найти передаточную функцию полосового фильтра с  $f_0 = 1000$  Гц и  $a_f = 100$  кГц, выполненного на основе фильтра Чебышева третьего порядка с  $a_n = 1$  дБ.

По справочнику базовый ФНЧ задан коэффициентами:

B	C
0,494	0,994
0,494	-

Полосовой фильтр содержит три звена второго порядка. Одно звено получается пересчетом звена первого порядка с  $B = 0,494$ , второе и третье – пересчетом звена второго порядка с  $B = 0,494$  и  $C = 0,994$ . Параметр пересчета

$$q = \frac{f_0}{a_f} = 10.$$

Имеем

$$K_1(p) = \frac{k_1 p}{p^2 + \frac{0,494}{10} p + 1}.$$

Коэффициенты

$$E = \frac{0,494}{20} = 0,0247; \quad D = 1 + \frac{1}{20} \sqrt{0,994 - \left(\frac{0,494}{2}\right)^2} = 1,048.$$

Передаточные функции

$$K_2(p) = \frac{k_2 p}{p^2 + 0,0259 p + 1,098}; \quad K_3(p) = \frac{k_3 p}{p^2 + 0,0236 p + 0,91}.$$

Учитывая нормирующую частоту  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^3$ , имеем

$$K_{p\phi_1}(p) = \frac{k_1 p}{p^2 + 0,0494 \cdot 2\pi \cdot 10^3 p + 4\pi^2 \cdot 10^6}.$$

Аналогично получаем  $K_{p\phi_2}(p)$  и  $K_{p\phi_3}(p)$ . Фильтр включает в себя три каскадно соединенных расстроенных по частоте контура. Их частоты и добротности таковы:

$$f_{p_1} = 1000 \text{ Гц}; \quad Q_1 = \frac{1}{0,0494} = 20,2;$$

$$f_{p_2} = 1000 \cdot 1,048 = 1048 \text{ Гц};$$

$$f_{p_3} = 1000 \cdot \frac{1}{1,048} = 954 \text{ Гц}; \quad Q_2 = Q_3 = \frac{1}{0,0247} = 40,5.$$

Преобразование ФНЧ в РФ. В данном случае используется частотное преобразование

$$p = \frac{1}{q(p' + \frac{1}{p'})}. \quad (I.73)$$

Параметр преобразования

$$q = \frac{1}{\bar{\rho}'_{n+} - \bar{\rho}'_{n-}}, \quad (I.74)$$

где  $\Omega'_+$  и  $\Omega'_{-}$  - границы верхней и нижней полос пропускания. Нормирующая частота  $\Omega' = 1$  соответствует центральной частоте зоны подавления (режекции).

Сравнив (I.73) с формулами пересчета для полосового фильтра (I.56) и ФВЧ (I.48), можно наметить следующий путь преобразования. Сначала произвести пересчет плоскости  $p$  в плоскость  $p''$  как для фильтра ВЧ:

$$p = \frac{1}{p''}$$

Затем осуществить пересчет  $p'' \rightarrow p'$  по методике пересчета полосового фильтра:

$$p'' = q(p' + \frac{1}{p'}) = \frac{1}{p}$$

Очевидно, что при этом связь  $p \rightarrow p'$  соответствует (I.73).

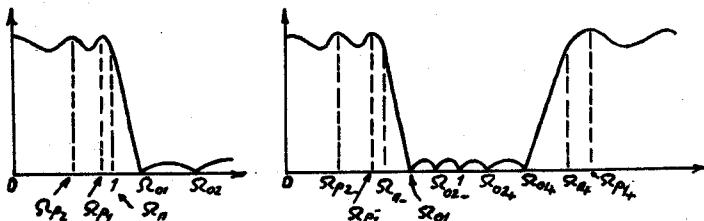


Рис. I.26

На рис. I.26 показана трансформация АЧХ базового фильтра в АЧХ режекторного фильтра. Каждая характеристическая точка шкалы частот  $\Omega_0$  и  $\Omega_p$  базовой АЧХ пересчитывается в две точки  $\Omega'_{0\pm}$  и  $\Omega'_{p\pm}$  по формуле

$$\Omega'_\pm = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2q\Omega}\right)^2} \pm \frac{1}{2q\Omega} \quad (\text{I.75})$$

Имеет место симметрия каждой пары относительно единицы:

$$\Omega'_+ = \frac{1}{\Omega'_-}$$

#### I.10. Переходные характеристики фильтров Баттервортса, Чебышева и эллиптических. Фильтры Бесселя

При постановке задачи о реализации фильтра, обеспечивающего "идеальную" частотную селекцию, ничего не говорилось об искажениях полезного сигнала при прохождении его через фильтр. Очевидно, что

32

если спектр входного сигнала не укладывается полностью в полосу пропускания фильтра, то неизбежны искажения выходного сигнала. Однако и в том случае, когда весь спектр сигнала (или подавляющая его часть) заключен внутри полосы пропускания фильтра, это еще не гарантирует от искажения передачи. Дело тут в фазочастотной характеристике (ФЧХ) фильтра. Как известно, линейная ФЧХ не искажает сигнала, а вызывает лишь задержку выходного сигнала относительно входного на время  $\tau$ , равное коэффициенту  $k$  наклона характеристики  $\tau = -k$ . Нелинейность ФЧХ приводит к искажению формы сигнала. С этой точки зрения более наглядна не сама ФЧХ  $\varphi(\omega)$ , а ее производная

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega},$$

называемая обычно характеристикой группового времени запаздывания. величина  $\tau(\omega)$  имеет смысл запаздывания сигнала, спектр которого сосредоточен в узкой полоске частот  $\Delta\omega$  около некоторой частоты  $\omega$ .

Рис. I.27 иллюстрирует сказанное. Пусть при равномерной АЧХ фильтр имеет ФЧХ (рис. I.27,а), соответствующую характеристике группового времени запаздывания (рис. I.27,б). Если мысленно выделить группу спектральных составляющих в районе частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (ширины  $\Delta\omega$ ), то соответствующие им сигналы будут представлять собой радиоимпульсы вида  $\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$  с разными несущими частотами (рис. I.27,в и г). На выходе фильтра эти сигналы появятся без искажения формы, но с разными запаздываниями. Очевидно, что любой входной сигнал можно представить как сигнал, состоящий из таких элементарных импульсов, каждый из которых соответствует определенной группе частот. Разные задержки отдельных импульсов и приводят к искажению формы выходного сигнала.

Фазочастотные характеристики рассмотренных выше классических фильтров существенно нелинейны, а значит характеристики группового времени запаздывания не постоянны по частоте. В качестве примера на рис. I.28 приведены характеристики группового времени запаздывания разных фильтров (на рисунке 1 - фильтр Бесселя; 2 - фильтр Баттервортса,  $n=4$ ; 3 - фильтр Баттервортса,  $n=6$ ; 4 - фильтр Чебышева,  $a_n = 0,5$  дБ; 5 - фильтр Чебышева,  $a_n = 3,0$  дБ).

С нелинейностью ФЧХ связан колебательный характер переходной характеристики фильтра (отклика на единичную ступеньку). Примеры таких характеристик приведены на рис. I.29, где 1 - фильтр Бес-

селя; 2 - фильтр Баттервортса,  $n = 4$ ; 3 - фильтр Баттервортса,  $n = 6$ ; 4 - фильтр Чебышева,  $a_n = 3$  дБ. Если к фильтру предъявляются требования с точки зрения хорошей передачи скачков (и прямоугольных импульсов), то рассмотренные выше классические фильтры могут оказаться неприемлемыми.

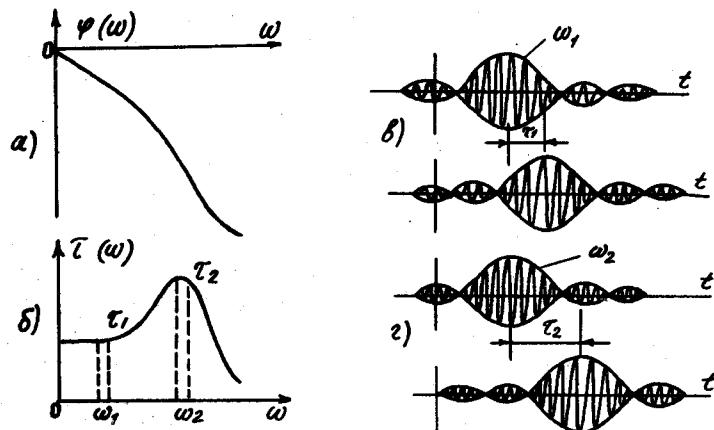


Рис. I.27

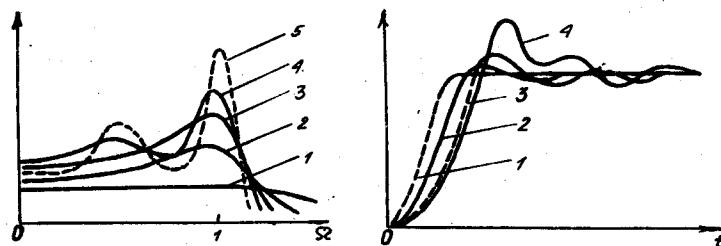


Рис. I.28

В теории фильтров рассмотрена задача получения максимально плоской характеристики группового времени запаздывания (в том же смысле, в каком фильтр Баттервортса обеспечивает максимально плоскую АЧХ). Эти фильтры известны как фильтры Бесселя. Они обеспечивают хорошую характеристику  $\tau(\omega)$  и переходную характеристику, однако их АЧХ существенно уступает АЧХ фильтрам Баттервортса.

Координаты полюсов (или коэффициенты полиномов) фильтров Бесселя также приводятся в справочниках (см., например, [1]).

Рис. I.29

На рисунке I.29 изображены временные диаграммы для различных фильтров. Пять кривых (1-5) иллюстрируют различные типы фильтров, различающиеся степенями полюсов и нулей.

Возможны и компромиссные решения. Так, положение полюсов фильтра можно выбирать как некоторое среднее между полюсами фильтров Баттервортса и Бесселя (фильтры Томсона).

## 2. ВОПРОСЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Заключительным этапом синтеза фильтра по заданным характеристикам является реализация передаточной функции, полученной путем аппроксимации АЧХ. Основным содержанием этой части синтеза является переход от математической модели (передаточной функции фильтра) к его функциональной и принципиальной схемам.

Найденную передаточную функцию фильтра можно реализовать с помощью электрических цепей различных классов. Рассмотрим два класса цепей, широко распространенных при построении фильтров:

- пассивные цепи на элементах  $R, L, C$ ;
- активные цепи на транзисторах или операционных усилителях и пассивных элементах  $R, C$ .

Фильтры, построенные на основе этих цепей, называются соответственно  $RLC$ -фильтрами и активными  $RC$ -фильтрами ( $ARC$ -фильтрами).

### 2.1. Принципы реализации $RLC$ -фильтров

Широко распространена реализация  $RLC$ -фильтров в виде лестничных структур, передаточные функции которых могут иметь или только полюсы, или полюсы и нули передачи. Например, ФНЧ может быть реализован в нескольких вариантах (рис. 2.1). На рис. 2.1, а показан ФНЧ, передаточная функция которого содержит только полюсы, и на рис. 2.1, б и в - ФНЧ, передаточная функция которого обладает также и нулями, которые определяются последовательным включением параллельных контуров  $L, C$ , и  $L_3, C_3$  или параллельным включением последовательных контуров  $L_2, C_2$  и  $L_4, C_4$ .

Чтобы рассчитать параметры элементов фильтра, достаточно выразить его передаточную функцию через искомые параметры  $L_i, C_i$  и сопоставить с передаточной функцией, полученной в результате аппроксимации АЧХ фильтра. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях комплексной переменной  $p$ , получим систему уравнений относительно  $L_i$  и  $C_i$ .

Такой метод расчета элементов хорошо разработан, а необходимые для его реализации исходные данные сведены в справочные таблицы. В них приведены нормированные (безразмерные) координаты

полюсов и нулей и нормированные значения параметров индуктивностей и ёмкостей для ФНЧ лестничного типа.

Нормирование всех размерных величин проводится для упрощения расчетов. В качестве нормирующих величин используются граничная частота полосы пропускания  $\omega_n$  и сопротивление нагрузки  $R_H$ .

Так, некоторый полюс  $p' = \sigma + j\omega$  ФНЧ с граничной частотой  $\omega_n$  в нормированном виде записывается как  $p = \alpha + j\beta$ , где  $\alpha = \sigma/\omega_n$ ;  $\beta = \omega/\omega_n$ . Элементы  $L$  и  $C$  нормируются следующим образом:

$$L = \omega_n L / R_H, C = \omega_n C R_H.$$

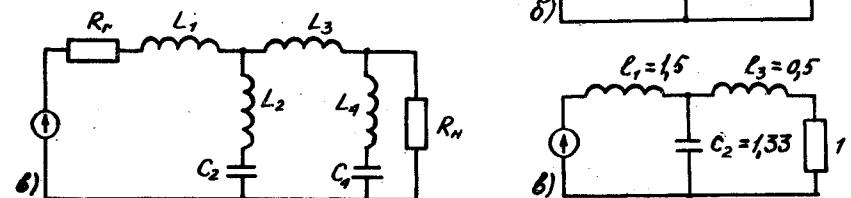
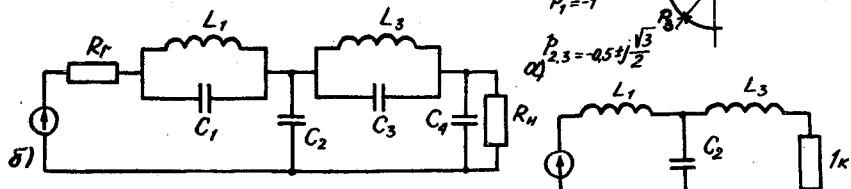
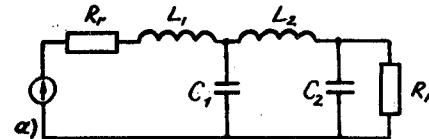


Рис. 2.1

Рис. 2.2

Пример 2.1. Пусть требуется реализовать ФНЧ Баттерворта третьего порядка с граничной частотой полосы пропускания  $f_n = 1$  МГц и нагрузочным сопротивлением 1 кОм (см. пример I.1).

Нормированная передаточная функция этого фильтра имеет вид

$$K(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}, \quad (2.1)$$

где  $p_1 = -1$ ,  $p_{2,3} = -0.5 \pm j(\sqrt{3})/2$ .

Расположение полюсов показано на рис. 2.2, а. Схема реализации представлена на рис. 2.2, б, где  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  – физические элементы, величины которых необходимо определить. Переидем к схеме с

нормированными элементами  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ , в которой нагрузкой является единичное (безразмерное) сопротивление (рис. 2.2, в), и вычислим ее передаточную функцию:

$$K(p) = \frac{1}{l_1 C_2 l_3} \frac{1}{p^3 + p^2 \frac{1}{l_3} + p \frac{l_1 + l_3}{l_1 C_2 l_3} + \frac{1}{l_1 C_2 l_3}}. \quad (2.2)$$

Сопоставим выражения (2.1) и (2.2) для передаточной функции и приравняем соответствующие коэффициенты:

$$\frac{1}{l_3} = 2; \quad \frac{l_1 + l_3}{l_1 C_2 l_3} = 2; \quad \frac{1}{l_1 C_2 l_3} = 1. \quad (2.3)$$

Решение системы уравнений (2.3) дает:

$$l_1 = 1.5; \quad C_2 = 1.33; \quad l_3 = 0.5.$$

Для определения значений  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  произведем обратный пересчет – денормирование:

$$l_1 = \frac{l_1 R_H}{\omega_n} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 10^6} = 239 \text{ мкГ.}$$

$$C_2 = \frac{C_2}{\omega_n R_H} = \frac{1.33}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 10^3} = 212 \text{ пФ.}$$

$$l_3 = \frac{l_3 R_H}{\omega_n} = \frac{0.5 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 10^6} = 80 \text{ мкГ.}$$

Проведение подобных расчетов для фильтров высокого порядка оказывается весьма трудоемким. Поэтому в справочниках приводят рассчитанные величины нормированных элементов  $l_i$  и  $C_i$ , которые необходимо только денормировать по заданным граничной частоте полосы пропускания и нагрузочному сопротивлению.

## 2.2. Особенности реализации полосовых $RLC$ -фильтров

Частотное преобразование (I.56) дает возможность по исходным справочным данным (координатам полюсов и нулей или коэффициентам полиномов) получить выражение нормированной передаточной функции полосового фильтра в форме произведения отдельных сомножителей, каждый из которых представляет собой передаточную функцию обычного одноконтурного резонансного усилителя. Параметры усилителя – частота настройки  $\omega_p$ , добротность  $Q$  и коэффициент усиления на резонансной частоте  $K_{рез}$  – сразу видны из записи сомножителя (см. пример I.6). Произведению сомножителей соответствует каскадноеключение резонансных усилителей, при котором исключается влияние конту-

ров друг на друга, поскольку они разделены активными приборами – транзисторами. Это есть вариант реализации полосового фильтра с помощью многокаскадного резонансного усилителя с расстроенными друг относительно друга контурами. Каждый каскад реализует один из со-множителей передаточной функции вида (I.72) или, что то же самое, два комплексно-сопряженных полюса и один нуль ( $\rho_0 = 0$ ). Элементы схемы каждого каскада рассчитываются независимо. Так, фильтр, передаточная функция которого определена в примере I.6, может быть реализован по схеме, представленной на рис. 2.3. Частоты настройки каскадов ( $f_{p_1} = 1000$  кГц,  $f_{p_2} = 1048$  кГц,  $f_{p_3} = 954$  кГц) определяются выбором элементов  $\angle C$ -контуров ( $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ), добротности ( $Q_1 = 20,2$ ;  $Q_2 = Q_3 = 40,5$ ) обеспечиваются сопротивлениями резисторов  $R_1, R_2, R_3$ , шунтирующих контуры ( $B = \frac{R}{\sqrt{LC}}$ ). Неполное включение контура применено для того, чтобы ослабить влияние всех остальных параметров схемы (особенно входного и выходного сопротивлений транзисторов и паразитных емкостей) на частотную характеристику.

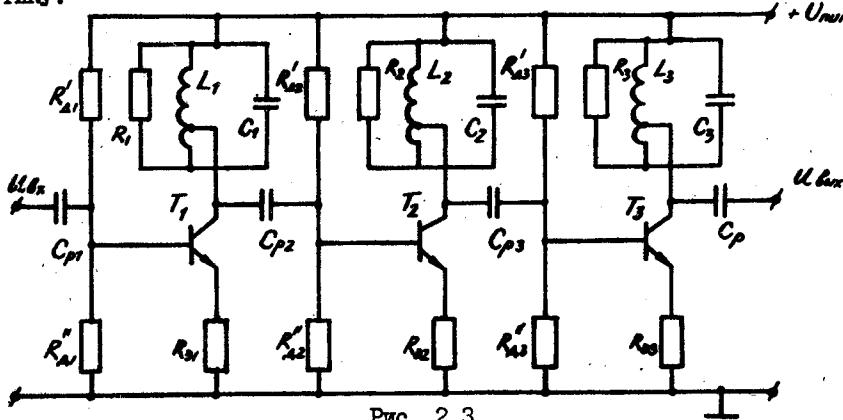


Рис. 2.3

Тем не менее влияние активных элементов, их технологический разброс и нестабильность вынуждают применять в этой схеме подстройку. Как правило, это регулируемые сердечники катушек индуктивностей. Схема в целом не позволяет точно реализовать расчетную частотную характеристику.

Другой путь реализации полосовых фильтров – создание так называемых фильтров сосредоточенной селекции (ФСС). Это фильтры высокого порядка (выше третьего) лестничной структуры, в схеме кото-

рых активные усилители ставятся только на входе и выходе фильтра, что устраниет влияние выходного и входного сопротивлений остальной схемы. При точном выполнении пассивных элементов ( $L$  и  $C$ ) фильтр обеспечивает расчетные характеристики без подстройки.

Для получения структуры данного фильтра и расчета его элементов также используется частотное преобразование (I.56), однако оно применяется не к передаточной функции, а к самим элементам лестничной схемы базового фильтра НЧ.

Для примера преобразуем индуктивный элемент схемы-прототипа. Его нормированное комплексное сопротивление  $pL$  преобразуется следующим образом:

$$pL \rightarrow q \left( p' + \frac{1}{p'} \right) l = p' l' + \frac{1}{p' c'},$$

где

$$l' = qL, \quad c' = \frac{1}{qL}.$$

Как видим, индуктивность  $L$  преобразуется в последовательное соединение индуктивности  $l'$  и емкости  $c'$ . Последовательный контур  $l'c'$  настроен на нормированную частоту  $Q' = \frac{1}{\sqrt{l'c'}} = 1$ , т.е. на

центральную частоту полосового фильтра. Аналогично преобразуются и другие элементы лестничной структуры фильтра-прототипа (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1  
Частотные преобразования элементов ФНЧ в элементы ПФ

$\ell$	$\ell' = q\ell$	$c' = \frac{1}{q\ell}$
$c$	$\ell' = \frac{1}{q\ell}$	$c' = qc$
$\Omega_0$	$\ell' = q\ell \left( 1 + \frac{1}{\Omega_0^2} \right)$	$c' = q\ell \left( 1 + \frac{1}{\Omega_0^2} \right)$
$\ell$	$\ell' = q\ell \left( 1 + \frac{1}{\Omega_0^2} \right)$	$\ell'' = q\ell \left( 1 + \frac{1}{\Omega_0^2} \right)$
$c$	$c' = q\ell \left( 1 + \frac{1}{\Omega_0^2} \right)$	$c'' = q\ell \left( 1 + \frac{1}{\Omega_0^2} \right)$
$\Omega_0$	$\Omega_{0\pm} = \sqrt{\left(\frac{\Omega_0}{2q}\right)^2 + \frac{\Omega_0^2}{4q^2}}$	

После преобразования базовой лестничной схемы ФНЧ в схему ПФ и расчета нормированных элементов  $\ell'$ ,  $c'$ ,  $\ell''$ ,  $c''$  остается произвести денормирование с учетом центральной частоты фильтра  $\omega_0$  и сопротивления нагрузки  $R_H$ :

$$\ell = \frac{R_H}{\omega_0} \ell'; \quad c = \frac{1}{\omega_0 R_H} c'.$$

Пример 2.2. Определить схему ФСС и рассчитать элементы полосового фильтра с  $f_0 = 1$  МГц,  $\Delta f = 100$  кГц,  $R_H = 1$  кОм на базе НЧ фильтра-прототипа, рассмотренного в примере 2.1.

Преобразование базовой лестничной структуры (рис. 2.4, а) приводит к схеме полосового фильтра (рис. 2.4, б), элементы которой рассчитываются по формулам табл. 2.1 с  $q = \frac{f_0}{\Delta f} = 10$ ;  $\ell'_1 = 15$ ;  $\ell'_2 = 0,067$ ;  $\ell'_3 = 0,075$ ;  $c'_1 = 13,3$ ;  $c'_2 = 5$ ;  $c'_3 = 0,2$ .

Действительные элементы принципиальной схемы ФСС определяются денормированием с учетом  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^6$ ,  $R_H = 10^3$ ;  $\ell_1 = 2,2$  мГ;  $C_1 = 10$  пФ;  $\ell_2 = 15$  мкГ;  $C_2 = 2000$  пФ;  $\ell_3 = 0,7$  мГ;  $C_3 = 25$  пФ.

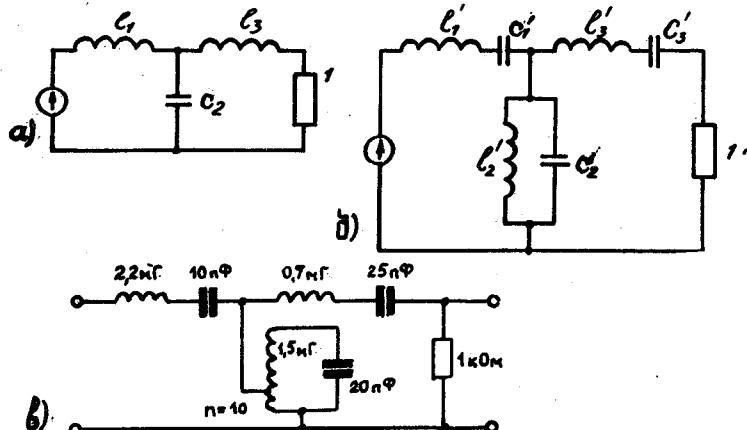


Рис. 2.4

Следует обратить внимание на одно существенное обстоятельство, выявившееся в результате расчета: номиналы  $\ell_2$  и  $C_2$  на два порядка отличаются от номиналов остальных элементов\*. Это чрезвы-

\*Заметим, что это не частный результат, а общая закономерность, связанная с умножением и делением на большой коэффициент  $q$ . При пересчете исходных элементов типа контуров такого эффекта не наблюдается.

чайно неудобно для практической реализации фильтра, так как технологический разброс в единицы процентов параметров элементов с большими номиналами перекрывает значения аналогичных параметров элементов с малыми номиналами. С учетом реальных допусков расчетные характеристики не могут быть надежно реализованы.

Выходом из этого затруднительного положения является применение эквивалентных преобразований схемы с использованием автотрансформаторного включения контура (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Эквивалентные преобразования контура

	$\ell = \ell' n^2$
	$c' = \frac{c}{n^2}$

Выбирая коэффициент трансформации  $n$ , можно получить желаемые изменения номиналов  $\ell$  и  $C$ . Так, в нашем примере, выбрав  $n = 10$ , получим увеличение индуктивности  $\ell_2$  и уменьшение емкости  $C_2$  в 100 раз (рис. 2.4, в).

При проектировании ФСС высокого порядка наряду с трансформаторным включением часто используют также и другие эквивалентные преобразования схем, известные из теории цепей, в частности преобразования Нортона [1]. Это позволяет получить более компактные схемы с меньшим числом элементов и удобными для реализации номиналами.

### 2.3. Основные направления реализации $RLC$ -фильтров

В пределах от звуковых частот до сотен мегагерц  $RLC$ -фильтры позволяют реализовать практически любые частотные характеристики. При этом достигается их высокая стабильность благодаря малой чувствительности параметров фильтра к разбросу величин  $\ell$  и  $C$  элементов.

Вместе с тем *RLC*-фильтры имеют недостатки. Так, в области низких частот значительно возрастают их масса и габариты, а для обеспечения помехоустойчивости в условиях воздействия электромагнитных полей приходится применять устаревшие конструкции - экранированные катушки, которые и определяют основные размеры и массу электрической части изделия. Уменьшение габаритов катушек не приводит к положительным результатам, так как добротность катушки индуктивности снижается пропорционально квадрату ее линейных размеров.

Достижения полупроводниковой техники, особенно микроэлектроники, обусловили интенсивную разработку и широкое использование *ARC*-фильтров, которые в значительной степени лишены недостатков *RLC*-фильтров.

Важными достоинствами *ARC*-фильтров являются хорошее сочетание технологий их изготовления с технологией изготовления микросхем, возможность совмещения функций фильтрации и усиления, а также малые массогабаритные характеристики, особенно по сравнению с *RLC*-фильтрами, работающими на низких частотах.

Недостатки *ARC*-фильтров проявляются с увеличением частоты рабочего диапазона. Это связано с тем, что реальные активные элементы обладают собственными частотными зависимостями, которые приводят к смещению полюсов передаточной функции фильтра относительно требуемых координат. Чем выше добротность реализуемых полюсов, тем сильнее влияние активного элемента и тем возможнее потеря устойчивости фильтра (возникновение самовозбуждения).

*ARC*-фильтры, выполненные на операционных усилителях (ОУ) общего назначения, имеют границу частного диапазона 10...20 кГц. Применяя специальную схемотехнику и используя высококачественные ОУ, можно поднять верхнюю границу частотного диапазона на два порядка. Однако при этом возникает вопрос о целесообразности такого построения фильтра. Дело в том, что на частотах выше 100 кГц катушка индуктивности становится достаточно удобным элементом схемы и *RLC*-фильтры начинают конкурировать с *ARC*-фильтрами. Поэтому основным доводом в пользу той или иной реализации фильтра является совместимость с точки зрения технологии изготовления схем и интегральных микросхем.

По оценкам специалистов, изготовление микроэлектронных *RLC*-фильтров для частот ниже 40...50 МГц при современном технологическом уровне вряд ли возможно. Поэтому и в диапазоне сотен

килогерц применение *ARC*-фильтров следует считать оправданным и целесообразным.

Для реализации высокочастотных активных фильтров перспективным оказалось использование имеющейся частотной характеристики ОУ, обеспечивающей требуемую характеристику цепи, состоящей только из резисторов и операционных усилителей. Фильтры, построенные по такому принципу, получили название активных *R*-фильтров. Они позволяют поднять верхнюю границу рабочего диапазона до десятков мегагерц.

В настоящее время сформировались следующие подходы к построению безиндуктивных фильтров:

1. Имитация индуктивностей с помощью специальных активных цепей - конверторов сопротивления, например гираторов.

Такие цепи представляют собой четырехполюсник, который преобразует емкостное сопротивление на выходных зажимах в индуктивное сопротивление на входных. С помощью гираторов можно заменить в схеме *LC*-прототипа все индуктивности на активные элементы и пассивные *R* и *C* элементы.

2. Использование ОУ, охваченных частотно-зависимыми обратными связями.

Существует большое многообразие структурных схем таких активных фильтров. Однако провести четкую границу между отдельными их видами трудно. Общим для них является то, что требуемая передаточная функция фильтра реализуется с использованием свойств ОУ без обращения к *LC*-прототипам.

3. Непосредственное аналоговое моделирование дифференциального уравнения, описывающего фильтр, с помощью интеграторов и сумматоров, выполненных на ОУ.

Подробно указанные подходы рассмотрены ниже.

#### 2.4. Гираторные схемы

На рис. 2.5 приведена схема гиратора - специального активного четырехполюсника, обладающего чрезвычайно интересными свойствами, в частности способностью имитировать индуктивности.

Рассмотрим работу схемы в предположении идеальности ОУ, входящих в схему ( $u_{6xOY} = 0, I_{6xOY} = 0$ ). Все сопротивления *R* гиратора одинаковы, за исключением внешнего сопротивления нагрузки  $Z_H$ . На рисунке токи, текущие в разных ветвях, обозначены

как равные ( $I_2$  и  $I_3$ ), что является следствием идеальности ОУ. Действительно, из условия  $U_{6x\text{OU}} = 0$  вытекает

$$U_A = U_B = U_{6x}, \quad U_C = U_D = U_{6x}.$$

Следовательно, токи, текущие через  $R_3$  и  $R_4$ , одинаковы ( $I_2$ ). Одинаковы и токи, текущие через  $R_5$  и  $R_6$  ( $I_3$ ).

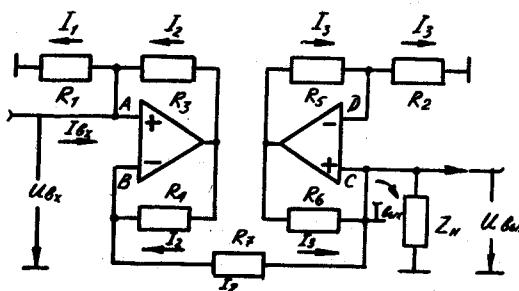


Рис. 2.5

Из условия  $I_{6x\text{OU}} = 0$  следует равенство токов, текущих через  $R_4$  и  $R_3$  ( $I_2$ ), и токов, текущих через  $R_5$  и  $R_6$  ( $I_3$ ). Из того же условия следует, что токи в узлах  $A$  и  $C$  будут

$$I_{6x} = I_1 - I_2; \quad (2.4)$$

$$I_{6x} = I_2 + I_3. \quad (2.5)$$

Остальные уравнения очевидны (исходя из падения напряжения на  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $Z_H$ ):

$$I_1 = \frac{U_{6x}}{R}; \quad (2.6)$$

$$I_2 = \frac{U_{6x} - U_{6x}}{R}; \quad (2.7)$$

$$I_3 = \frac{U_{6x}}{R}; \quad (2.8)$$

$$U_{6x} = I_{6x} Z_H. \quad (2.9)$$

Подстановка (2.6) и (2.7) в (2.4), а также (2.7) и (2.8) в (2.5) дает

$$I_{6x} = \frac{U_{6x}}{R}; \quad (2.10)$$

$$I_{6x} = \frac{U_{6x}}{R}. \quad (2.11)$$

Хитроумная система обратных связей обеспечивает основное свойство гиратора: входной ток определяется выходным напряжением, а выходной ток – входным напряжением.

Из (2.9), (2.10) и (2.11) получим коэффициент передачи гиратора и его входное сопротивление:

$$K_G = \frac{U_{6x}}{U_{6x}} = \frac{Z_H}{R} = \frac{Z_H}{\sqrt{G}}; \quad (2.12)$$

$$Z_{6x} = \frac{U_{6x}}{I_{6x}} = \frac{R^2}{Z_H} = \frac{G}{Z_H}. \quad (2.13)$$

Коэффициент  $G = R^2$  называется коэффициентом гирации. Гиратор обладает симметрией входов. Если подать напряжение на вход 2 (рис. 2.6), а нагрузку подсоединить к выходу 1, то все соотношения остаются в силе. Таким образом, гиратор – симметричный ненаправленный трехполюсник (клетка 1, клетка 2, 1). На схемах гиратор обозначается специальным символом трехполюсника (см. рис. 2.6).

Из (2.13) видно, что емкость  $C_H$ , подсоединеная к одним клеммам, воспринимается как индуктивность на других клеммах:

$$Z_{6x} = \frac{G}{1/j\omega C_H} = j\omega G C_H = j\omega L_E. \quad (2.14)$$

Гиратор, нагруженный на емкость и включенный в остальную схему как двухполюсник (клетка 1, 1), имитирует индуктивность (рис. 2.7).

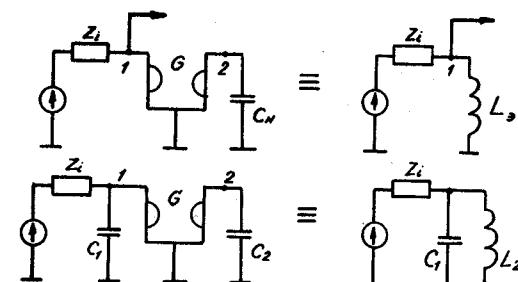


Рис. 2.7

С помощью гираторов можно имитировать не только индуктивности с одним заземленным концом, но и индуктивности, последовательно включаемые в схему. Для этого гираторы включают "на проход".

Рассмотрим схему (рис. 2.8, а), в которой между источником и нагрузкой включены последовательно два гиратора. Гиратор  $G_2$  "пересчитывает" нагрузку  $Z_H$  из точки 3 в точку 2 как  $Z_2 = \frac{G}{Z_H}$ , а гиратор  $G_1$  пересчитывает это сопротивление в точку 1 как

$$Z_1 = \frac{G}{Z_2} = \frac{G Z_H}{G} = Z_H.$$

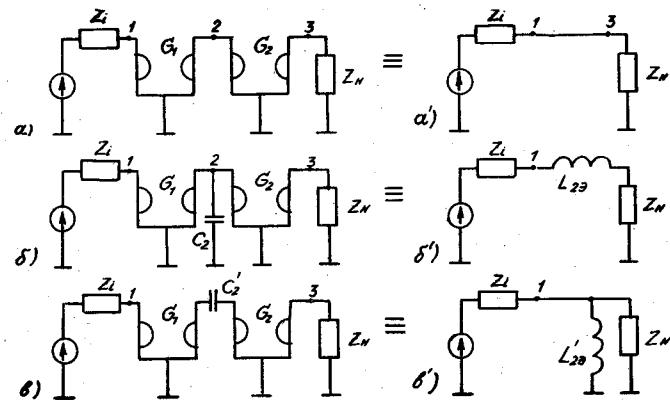


Рис. 2.8

Источник оказывается нагруженным на  $Z_H$ , так как если бы двух гираторов не было (см. рис. 2.8, а').

Коэффициент передачи из точки I в точку 2

$$K_{G_1} = \frac{Z_2}{\sqrt{G}} = \frac{G}{Z_H \sqrt{G}}.$$

Общий коэффициент передачи

$$K_{G_1 G_2} = K_{G_1} \frac{Z_H}{\sqrt{G'}} = \frac{G}{Z_H \sqrt{G'}} \cdot \frac{Z_H}{\sqrt{G}} = 1.$$

На нагрузке устанавливается то же напряжение, что и в точке I.

Итак, два последовательно включенных гиратора эквивалентны прямому проводу, соединяющему точки I и 3.

Пусть теперь к средней точке 2 подсоединенна заземленная емкость  $C_2$  (рис. 2.8, б). Сопротивление нагрузки, пересчитанное в точке 2, включено параллельно емкости  $C_2$ . Общее сопротивление нагрузки первого гиратора  $G_1$  составляет

46

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{Z_H}{G}}.$$

Коэффициент передачи (от точки I к точке 2)  $K_{G_1} = \frac{Z_2}{\sqrt{G}}$  всего соединения

$$K_{G_1 G_2} = \frac{Z_2}{\sqrt{G}} \frac{Z_H}{\sqrt{G}} = \frac{Z_H}{j\omega G C_2 + Z_H} = \frac{Z_H}{j\omega L_{23} + Z_H}.$$

Этому соответствует эквивалентная схема, приведенная на рис. 2.8, б'.

Аналогичный анализ схемы, изображенной на рис. 2.8, в, с последовательно включенной емкостью  $C_2'$  приводит к эквивалентной схеме, представленной на рис. 2.8, в', в которой эквивалентная индуктивность включена параллельно.

Таким образом, последовательное соединение двух гираторов, работающих "на проход", открывает новые возможности имитации: сопротивление  $Z_2$ , включенное параллельно в среднюю точку (в данном случае – в точку 2) создает имитацию последовательного включения эквивалентного сопротивления  $Z_3$ , а сопротивление  $Z_2'$ , включенное в "разрыв" в точке 2, имитирует параллельное эквивалентное сопротивление  $Z_3'$ .

Применяя это правило, нетрудно убедиться, что включение некоторого соединения емкостей между двумя гираторами создает имитацию некоторой конфигурации индуктивностей вне гираторов (рис. 2.9).

Соотношение между эквивалентными индуктивностями и емкостями внутри гираторной схемы всегда одно и то же:

$$L_3 = G C; \quad C = \frac{L_3}{G}. \quad (2.15)$$

С помощью гираторов и одних только емкостей можно создавать схемы, эквивалентные любым  $\mathcal{LC}$ -соединениям (см., например, рис. 2.10). Для удобства сравнения гираторных и  $\mathcal{LC}$ -схем нумерация реактивностей сделана одинаковой: емкости в гираторной схеме, имеющие те же индексы, что и индуктивности в  $\mathcal{LC}$ -схеме, имитируют именно эти индуктивности, и их величины соответствуют (2.15).

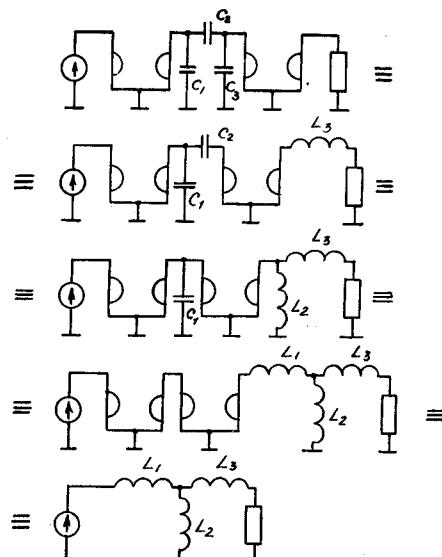


Рис. 2.9

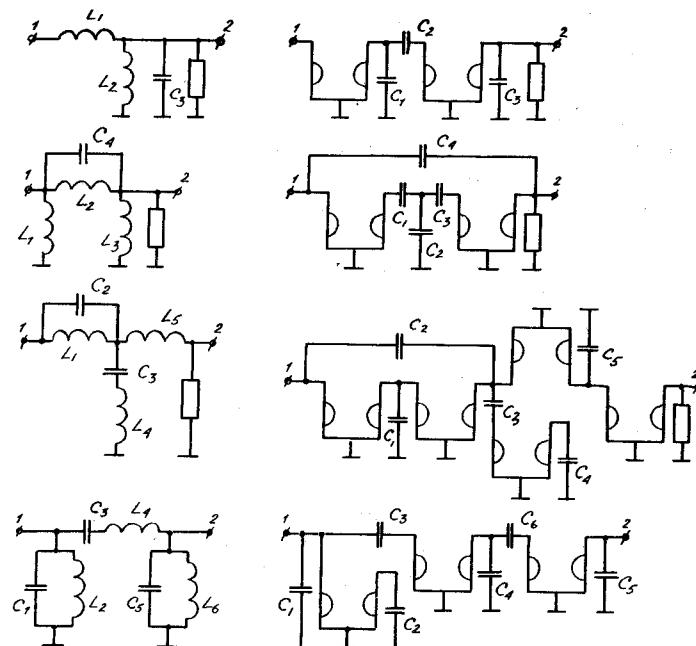


Рис. 2.10

## 2.5. Типовые звенья второго порядка

В практике реализации передаточной функции фильтра, отвечающего заданным требованиям, существуют методы, основанные на построении *ARC*-фильтра на базе типовых звеньев второго порядка. В основном для построения этих звеньев используют ОУ, охваченные частотно-зависимыми цепями обратной связи.

В случае передаточной функции первого порядка провести анализ частотных свойств цепи, реализующей эту функцию, достаточно просто. Так, для усилителя, реализующего передаточную функцию ФНЧ первого порядка (рис. 2.11, а), можно записать

$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} = - \frac{V_3 - V_2}{R_2} (1 + p R_2 C); V_2 = 0,$$

что приводит к выражению

$$K(p) = -k \frac{\alpha}{p + \alpha}, \quad (2.16)$$

где  $k = R_2/R_1$ ;  $\alpha = 1/R_2 C$ .

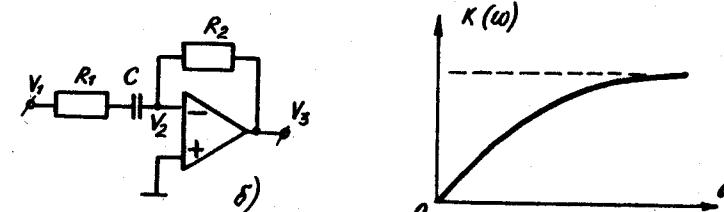
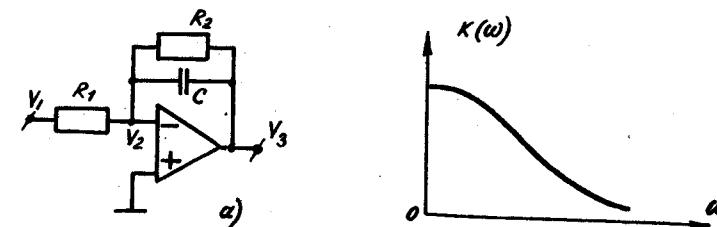


Рис. 2.11

Для усилителя, реализующего ФВЧ первого порядка (рис. 2.11, б), передаточная функция определяется аналогично:

$$K(p) = -k \frac{p}{p + \alpha}, \quad (2.17)$$

где  $k = R_2/R_1$ ,  $\alpha = 1/R_1 C$ .

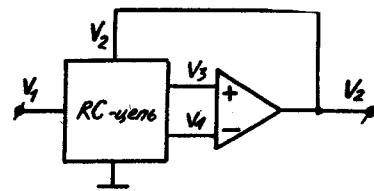


Рис. 2.12  
суперпозиции, можно записать

$$\begin{aligned} V_3 &= V_1 K_{13}(p) + V_2 K_{23}(p); \\ V_4 &= V_1 K_{14}(p) + V_2 K_{24}(p), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$K_{13}(p) = \frac{V_3(p)}{V_1(p)} \Big|_{\substack{V_2=0, \\ V_4=0}}, \quad K_{23}(p) = \frac{V_3(p)}{V_2(p)} \Big|_{\substack{V_1=0, \\ V_4=0}},$$

$$K_{14}(p) = \frac{V_4(p)}{V_1(p)} \Big|_{\substack{V_2=0, \\ V_3=0}}, \quad K_{24}(p) = \frac{V_4(p)}{V_2(p)} \Big|_{\substack{V_3=0, \\ V_1=0}}.$$

Для идеального ОУ, охваченного отрицательной обратной связью, выполняется равенство  $V_3 = V_4$ , поэтому

$$K_{12}(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = - \frac{K_{13}(p) - K_{14}(p)}{K_{23}(p) - K_{24}(p)}. \quad (2.19)$$

В выражении (2.19) нули передаточной функции звена определяются нулями числителя  $K_{13}(p) - K_{14}(p)$ , а полюсы – нулями знаменателя  $K_{23}(p) - K_{24}(p)$ . Для того чтобы по схеме типового звена можно было определить характер его АЧХ, следует оценить частотные характеристики  $K_{13}(\omega)$ ,  $K_{14}(\omega)$ ,  $K_{23}(\omega)$  и  $K_{24}(\omega)$ . Они определяются свойствами различных  $T$ -мостов, построенных на  $RC$ -элементах. Рассмотрим сначала одинарные  $T$ -мосты, представленные на рис. 2.13–2.16.

В первой схеме (рис. 2.13) при  $\omega = 0$  имеем

$$K(\omega) = R_2 / (R_1 + R_2).$$

С повышением частоты сопротивления конденсаторов  $C_3$  и  $C_5$  снижаются и коэффициент передачи монотонно уменьшается до нуля.

Во второй схеме (рис. 2.14) на низких частотах коэффициент передачи стремится к нулю из-за влияния конденсатора  $C_1$ . На вы-

соких частотах оказывается влияние конденсатора  $C_4$ , и коэффициент передачи также стремится к нулю. На средних частотах вблизи некоторой частоты  $\omega_p$ , определяемой произведением постоянных времени цепей  $R_2 C_1$  и  $R_3 C_4$ , существует максимум коэффициента передачи.

В третьей схеме (рис. 2.15)  $K(0) = 0$  – оказывается влияние конденсаторов  $C_1$  и  $C_4$ , с ростом частоты происходит монотонное увеличение коэффициента передачи до  $K(\infty) = (1/C_3)/(1/C_1 + 1/C_4)$ .

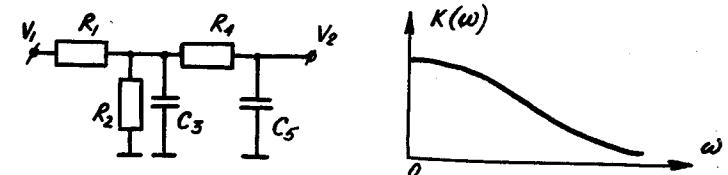


Рис. 2.13

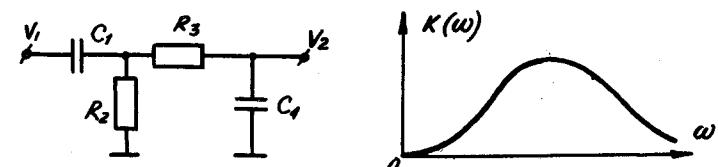


Рис. 2.14

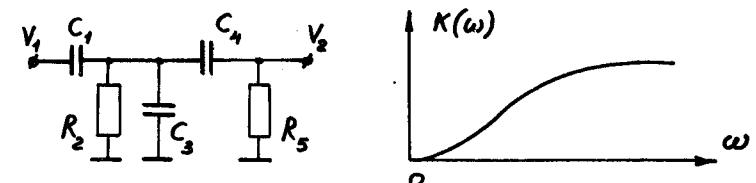


Рис. 2.15

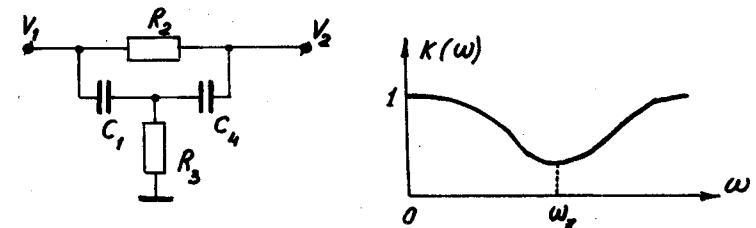


Рис. 2.16

В четвертой схеме (рис. 2.16) на низких и высоких частотах коэффициент передачи стремится к единице. В области средних частот вблизи частоты  $\omega_x$ , определяемой произведением постоянных времени  $R_2C_1$  и  $R_3C_4$ , наблюдается минимум коэффициента передачи.

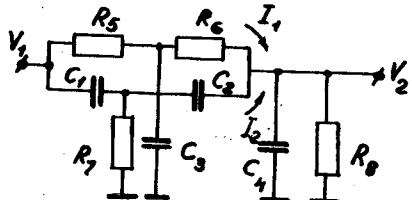


Рис. 2.17

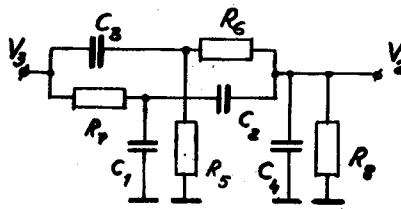
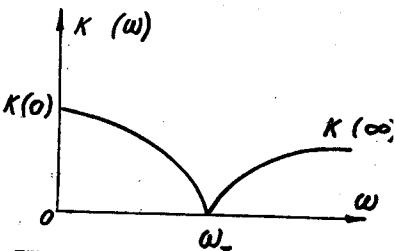


Рис. 2.18

На рис. 2.17 и 2.18 представлены двойные  $T$ -мосты\*. Анализ первой схемы (рис. 2.17) показывает, что ее коэффициент передачи меняется от  $K(0)=R_8/(R_5+R_6+R_8)$  при  $\omega=0$  до  $K(\infty)=$

$= (1/C_4)/(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_4)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . В области средних частот на некоторой частоте наступает баланс двойного  $T$ -моста, т.е. коэффициент его передачи обращается в нуль. При этом токи в верхней и нижней ветвях моста равны по величине и противоположны по направлению ( $I_1 = -I_2$ ). Равенство нулю выходного напряжения в цепи  $R_8C_4$  позволяет ее закоротить, так как это не приведет к изменению токов и напряжений в остальной части схемы. Такое преобразование цепи дает возможность рассмотреть цепи  $R_5R_6C_3$  и  $C_1C_2R_7$  независимо друг от друга и найти условие баланса моста на частоте  $\omega_x$ :

$$\omega_x^2 = \frac{1}{\tau_1\tau_3} = \frac{1}{\tau_2\tau_4}, \quad (2.20)$$

где

\*Индексация элементов связана со схемой, изображенной на рис. 2.25.

$$\tau_1 = \frac{R_5R_6}{R_5+R_6}C_3; \tau_2 = R_7(C_1+C_2); \tau_3 = (R_5+R_6)\frac{L_1L_2}{C_1+C_2}.$$

Частотная характеристика второй схемы  $T$ -моста (см. рис. 2.18) имеет следующие особенности:  $K(0) = 0$ ;  $K(\infty) = 0$ ;  $K(\omega_p) = k_{max}$ . Здесь

$$\omega_p = \omega_x \sqrt{\frac{1 + R_8/R_7}{1 + C_4/C_3}}, \quad (2.21)$$

где

$$R_3 = R_5 + R_6; \quad C_g = C_1C_2/(C_1 + C_2).$$

Положение максимума  $\omega_p$  относительно частоты  $\omega_x$  зависит от соотношения между параметрами  $R_3$ ,  $R_8$ ,  $C_4$  и  $C_3$ . Если  $R_3C_3 > C_4R_8$ , то  $\omega_p > \omega_x$ , и наоборот.

Рассмотрим теперь возможные схемные решения типовых звеньев второго порядка. В общем случае передаточная функция звена записывается в виде

$$K(p) = k \frac{p^2 + \frac{\omega_x}{q_x}p + \omega_x^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p}p + \omega_p^2}, \quad (2.22)$$

где  $\omega_x$ ,  $\omega_p$  – частота нуля и полюса;  $q_x$ ,  $q_p$  – добротность нуля и полюса;  $k$  – масштабный множитель.

В зависимости от вида реализуемой передаточной функции (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) общее выражение (2.22) переходит в частные:

1. Для ФНЧ второго порядка передаточная функция описывается выражением.

$$K_{14}(p) = k \frac{\omega_p^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p}p + \omega_p^2}. \quad (2.23)$$

и может быть реализована схемой, представленной на рис. 2.19. В этой схеме  $V_2 = V_4$  и  $K_{14} = 0$ ,  $K_{24} = 1$ . Поэтому

$$K_{12}(p) = \frac{K_{13}(p)}{1 - K_{23}(p)}. \quad (2.24)$$

Полагая  $V_2 = 0$ , соединяем верхнюю обкладку конденсатора  $C_2$  с землей. При этом частотную характеристику  $K_{13}(p)$  определяет схема моста, приведенная на рис. 2.13. Полагая  $V_1 = 0$ , соединяем левый зажим резистора  $R_{11}$  с землей. При этом частотную характеристику  $K_{23}(p)$  определяет схема моста, изображенная на рис. 2.14. Очевидно,

видно, что на низких и высоких частотах функция  $1-K_{23}(\omega)$  будет близка к единице, а в области средних частот она будет иметь минимум. Отношение монотонно падающей функции  $K_{13}(\omega)$  к функции  $1-K_{23}(\omega)$  представлено на рис. 2.19.

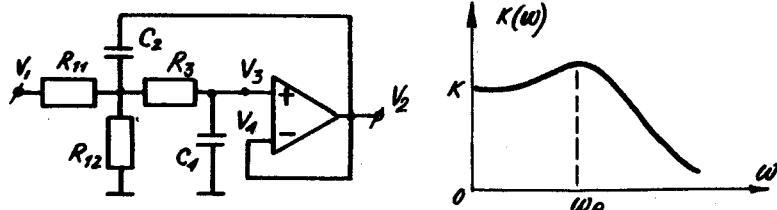


Рис. 2.19

Параметры передаточной функции  $K_{14}(p)$  связаны с элементами схемы (рис. 2.19) следующим образом:

$$\omega_p^2 = 1/R_1 C_2 R_3 C_4;$$

$$q_p = \sqrt{R_3 C_2 / R_1 C_4} / (1 + R_3 / R_1); \quad (2.25)$$

$$k = R_{12} / (R_{11} + R_{12});$$

$$R_1 = R_{11} R_{12} / (R_{11} + R_{12}).$$

2. Для ОВЧ второго порядка передаточная функция имеет вид

$$K_{14}(p) = k \frac{p^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} p + \omega_p^2} \quad (2.26)$$

и может быть реализована схемой, представленной на рис. 2.20. Здесь передаточная функция также определяется выражением (2.24). Только частотные свойства цепи обратной связи задаются характеристиками цепей, приведенных на рис. 2.14 (с измененным порядком включения CR- и RC-цепочек) и 2.15.

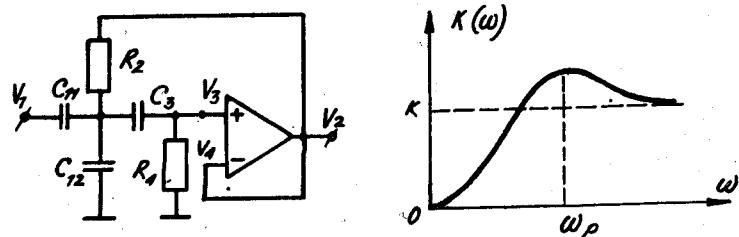


Рис. 2.20

Параметры передаточной функции  $K_{14}(p)$  связаны с элементами схемы (см. рис. 2.20) следующим образом:

$$\omega_p^2 = 1/C_1 R_2 C_3 R_4;$$

$$q_p = \sqrt{R_4 C_1 / R_2 C_3} / (1 + C_1 / C_3);$$

$$k = C_{11} / (C_{11} + C_{12});$$

$$C_1 = C_{11} + C_{12}.$$

3. Для ПФ второго порядка передаточная функция имеет вид

$$K_{14}(p) = k \frac{\frac{\omega_p}{q_p} p}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} p + \omega_p^2} \quad (2.28)$$

и может быть реализована схемой, представленной на рис. 2.21. При этом в формулу (2.28) необходимо ввести знак минус, так как частотно-зависимая связь отрицательная.

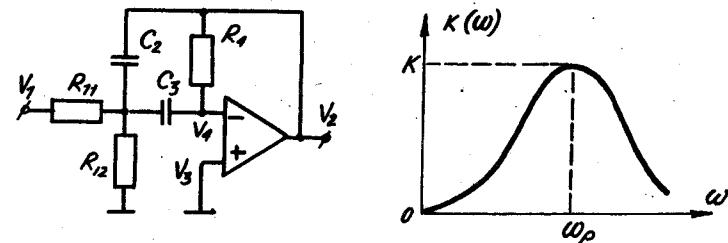


Рис. 2.21

В схеме  $V_3 = 0$ ,  $K_{13} = 0$ ,  $K_{23} = 0$ . Поэтому

$$K_{12}(p) = - \frac{K_{14}(p)}{K_{24}(p)}. \quad (2.29)$$

Полагая  $V_2 = 0$ , приходим к схеме цепи, частотные свойства которой показаны на рис. 2.14. Полагая  $V_1 = 0$ , получаем схему, изображенную на рис. 2.16. Коэффициент передачи  $K_{12}(\omega)$  определяется отношением функций  $K_{14}(\omega)$  и  $K_{24}(\omega)$  и представлен на рис. 2.21.

Параметры передаточной функции  $K_{14}(p)$  связаны с элементами схемы (рис. 2.21) следующим образом:

$$\omega_p^2 = 1/R_1 C_2 C_3 R_4;$$

$$q_p = \sqrt{R_4 C_2 / R_1 C_3} / (1 + C_2 / C_3);$$

$$k = -R_{12} k_0 / (R_{11} + R_{12});$$

$$k_0^2 = q_p^2 [1 + (C_3/C_2)];$$

$$R_1 = R_{11} R_{12} / (R_{11} + R_{12}).$$

4. Для РФ второго порядка передаточная функция имеет вид

$$K_{RF}(p) = k \frac{p^2 + \omega_p^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} p + \omega_p^2} \quad (2.31)$$

и может быть реализована схемой, представленной на рис. 2.22. В этой схеме входной сигнал через делитель  $R_5 R_6$  поступает на неинвертирующий вход ОУ. Тем самым осуществляется противофазное сложение входного сигнала и выходного сигнала цепи обратной связи, что позволяет получить на некоторой частоте нуль передачи.

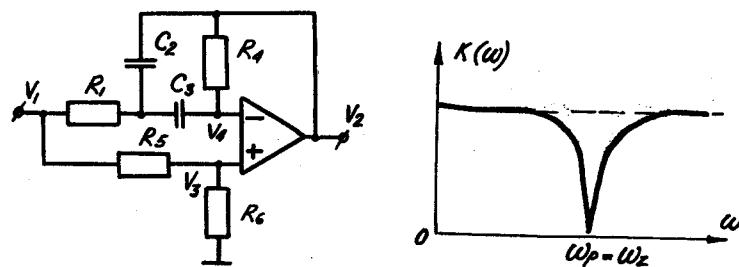


Рис. 2.22

Анализ схемы показывает, что  $K_{13} = R_6 / (R_5 + R_6) = \alpha$ ,  $K_{23} = 0$ , поэтому

$$K_{12}(p) = \frac{\alpha - K_{14}(p)}{K_{24}(p)} \quad (2.32)$$

Зависимость  $K_{14}(\omega)$  совпадает с аналогичной зависимостью для ПФ (см. рис. 2.14). Подбирая соотношение между сопротивлениями  $R_5$  и  $R_6$ , можно добиться равенства нулю коэффициента передачи  $K(\omega)$  на некоторой частоте  $\omega_x = \omega_p$ . Функция  $K_{24}(\omega)$  известна (см. рис. 2.16). В окончательном виде коэффициент передачи всего звена представлен на рис. 2.22.

Типовые звенья второго порядка (рис. 2.19–2.22) схемотехнически очень просты и экономичны с точки зрения технологии изготовления, так как для их реализации требуется всего один ОУ. Однако они имеют и определенные недостатки.

Основной недостаток рассмотренных схем  $ARC$ -фильтров заключается в том, что для регулировки частоты и добротности полюсов используются одни и те же элементы.

Предположим, что в схеме, изображенной на рис. 2.19, величины конденсаторов  $C_2$  и  $C_4$  выбраны постоянными. Тогда для установки необходимой частоты  $\omega_p$  мы должны выбрать сопротивления  $R_1$  и  $R_3$  такими, чтобы

$$R_1 R_3 = 1 / \omega_p^2 C_2 C_4.$$

При этом добротность полюса определяет отношение этих сопротивлений:  $q_p^2 \sim R_3 / R_1$  (если величины сопротивлений одного порядка).

Регулируя с помощью подстроечного резистора, например,  $R_3$  частоту  $\omega_p$ , мы вместе с ней изменяем добротность  $q_p$ , и наоборот. Такая взаимосвязь вызывает определенные трудности при практической реализации звеньев  $ARC$ -фильтров. Кроме того, с увеличением реализуемой добротности звена пропорционально  $q_p^2$  растет разброс номиналов сопротивлений или емкостей, что также является недостатком.

В силу отмеченных недостатков типовые звенья  $ARC$ -фильтров применяют лишь при низкой добротности реализуемых полюсов ( $q_p \leq 3$ ). Для построения более добротных звеньев и получения дополнительных возможностей для регулировки параметров вводят еще одну цепь отрицательной или положительной обратной связи в виде резистивного делителя на сопротивлениях  $R$  и  $R_q$ . Цепи  $RC$ , используемые в ФНЧ, ФВЧ и ПФ второго порядка, остаются теми же, что и на рис. 2.19–2.21.

Например, схема ФНЧ несколько видоизменяется (рис. 2.23). Такое же изменение отрицательной обратной связи происходит и в ФВЧ. В полосно-пропускающем фильтре, в котором неинвертирующий вход был заземлен (см. рис. 2.21), также вводится дополнительная цепочка положительной обратной связи (рис. 2.24).

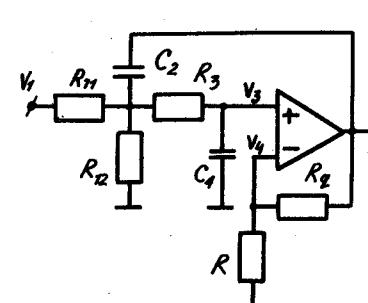


Рис. 2.23

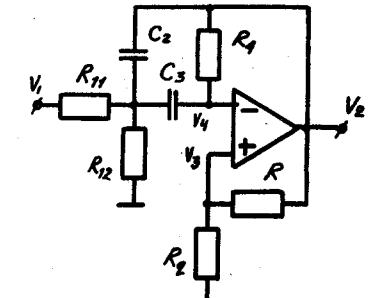


Рис. 2.24

Анализ частотных свойств типовых звеньев аналогичен. Отличие состоит только в передаточных функциях:

$$K_{23} = \frac{R_q}{R+R_q} \text{ (рис. 2.24); } K_{24} = \frac{R}{R+R_q} \text{ (рис. 2.23).}$$

Введение дополнительных элементов в схемы типовых звеньев позволяет производить регулировку добротности  $q_p$  и частоты  $\omega_p$  независимо друг от друга.

Передаточная функция ФНЧ, представленного на рис. 2.23, описывается выражением (2.23). Частота  $\omega_p$  определяется теми же элементами (2.25), а добротность и усиление звена изменяются:

$$q_p = \sqrt{R_3 C_2 / R_1 C_4} / [1 + (R_3 / R_1) - (R_q C_2 / R C_4)]; \quad (2.33)$$

$$k = [R_{12} / (R_{11} + R_{12})] [1 + (R_q / R)],$$

где  $R, R_q$  – сопротивления делителя в отрицательной обратной связи ОУ.

Выражения для добротности и усиления звена ФВЧ, передаточная функция которого описывается формулой (2.26), имеют вид

$$q_p = \sqrt{R_4 C_1 / R_2 C_3} / [1 + (C_1 / C_3) - (R_q R_4 / R R_2)]; \quad (2.34)$$

$$k = (C_{11} / C_1) [1 + (R_q / R)].$$

Добротность и усиление полосно-пропускающего фильтра (ПФ) с передаточной функцией (2.28) определяются соотношениями

$$q_p = \sqrt{C_1 R_3 / C_4 R_2} / [1 + (R_3 / R_2) - (C_1 R_q / C_4 R)]; \quad (2.35)$$

$$k = (C_{11} / C_1) q_p [1 + (R_q / R)] \sqrt{C_1 R_2 / C_4 R_3}.$$

Сравнивая между собой выражения для ФНЧ (2.25) и (2.33), видим, что частоту  $\omega_p$  можно установить одним резистором  $R_3$ , а добротность  $q_p$  – резистором  $R_q$  (см. рис. 2.23). Такая же зависимость существует и для ФВЧ: частота  $\omega_p$  регулируется резистором  $R_2$  или  $R_4$  (2.27), а добротность – резистором  $R_q$  (2.34). В полосовом фильтре частота  $\omega_p$  устанавливается резистором  $R_1$  или  $R_4$  (2.30), а добротность – резистором  $R_q$  (2.35).

Из выражений (2.33)–(2.35) следует, что рост реализуемой добротности не приводит к существенному разбросу параметров элементов схемы и позволяет создавать фильтры с добротностью полюсов до  $q = 20\dots25$ .

На звеньях второго порядка с повышенной добротностью строят также полосно-заграждающие фильтры (РФ), передаточные функции которых имеют вид

$$K_{P\varphi}(p) = k \frac{p^2 + \omega_z^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} p + \omega_p^2}. \quad (2.36)$$

Примером такого фильтра является усилитель, показанный на рис. 2.25. Частотные свойства фильтра можно исследовать, если проанализировать схемы, приведенные на рис. 2.17 и 2.18.

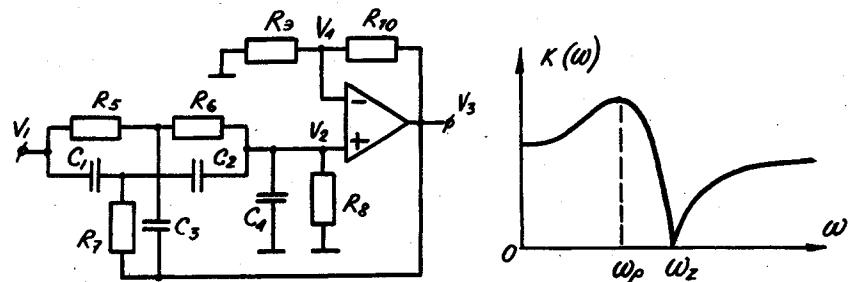


Рис. 2.25

При необходимости реализовать полюсы передаточной функции с добротностью  $q_p > 20$  следует учитывать чувствительность частотной характеристики фильтра к изменению параметров элементов. Так, попытка реализовать высокую добротность полюса с использованием типовых звеньев на основе одного ОУ, охваченного частотно-зависимой обратной связью (рис. 2.12), потребовала применения элементов с высокой стабильностью и узкими допусками параметров. Нередко на практике возникает необходимость в обеспечении раздельной регулировки масштабного коэффициента звена, частоты и добротности полюса. Добиться снижения требований к элементам и обеспечить раздельную регулировку параметров фильтра можно путем построения звеньев второго порядка на большем числе ОУ. Ниже будут рассмотрены два возможных варианта построения таких схем: схема биквадратичного звена (биквада) и схема на основе конвертора Антонио.

## 2.6. Биквад – биквадратичное звено

Этот термин, появившийся сравнительно недавно, означает универсальное звено второго порядка с двумя нулями и двумя полюсами, т.е. с передаточной функцией вида

$$K(p) = R_o \frac{g_0 p^2 + g_1 p + \omega_0^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{g_p} p + \omega_p^2}. \quad (2.37)$$

При разном сочетании коэффициентов числителя можно получить все виды основного звена (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) с произвольным расположением частоты режекции  $\omega_0$ : как выше, так и ниже  $\omega_p$ .

Известно довольно большое число различных схем биквадов. Одна из наиболее удачных по построению схем приведена на рис. 2.26, а. Для ее анализа удобно рассмотреть блок-схему, представленную на рис. 2.26, б, где треугольниками обозначены передачи от одного узла схемы к другому. Величина передачи от узла  $i$  к узлу  $j$  составляет

$$\mu_{ij} = \frac{Y_{ij}}{Y_{jj}},$$

где  $Y_{ij}$  — проводимость ветви, соединяющей узлы;  $Y_{jj}$  — собственная проводимость узла  $j$ , равная сумме проводимостей всех ветвей, стягивающихся к данному узлу. Для упрощения записи на рис. 2.26, б величины  $\mu$  даны с одним индексом:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \rightarrow v_1: \mu_1 = \frac{g_1 + pC_1}{Y_{11}} \\ u_2 \rightarrow v_1: \mu_2 = \frac{g_2 + pC_2}{Y_{11}} \\ u_3 \rightarrow v_1: \mu_3 = \frac{G_3}{Y_{11}} \\ u_1 \rightarrow v_2: \mu_4 = \frac{g_3}{Y_{22}} \\ u_2 \rightarrow v_2: \mu_5 = \frac{g_4}{Y_{22}} \\ u_4 \rightarrow v_2: \mu_6 = \frac{pC_3}{Y_{22}} \\ u_3 \rightarrow v_3: \mu_7 = \frac{G_2}{Y_{33}} \\ u_4 \rightarrow v_3: \mu_8 = \frac{G_1}{Y_{33}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y_{11} = g_1 + pC_1 + g_2 + pC_2 + G_3; \\ Y_{22} = g_3 + g_4 + pC_3; \\ Y_{33} = G_1 + G_2. \end{array} \quad (2.38)$$

Исходя из идеальности ОУ (т.е.  $U_{\text{вых}, \text{OU}} = 0$ ), имеем систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = \mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 = 0; \\ V_2 = \mu_4 U_1 + \mu_5 U_2 + \mu_6 U_4 = 0; \\ V_3 = \mu_7 U_3 + \mu_8 U_4 = 0. \end{array} \right\} \quad (2.39)$$

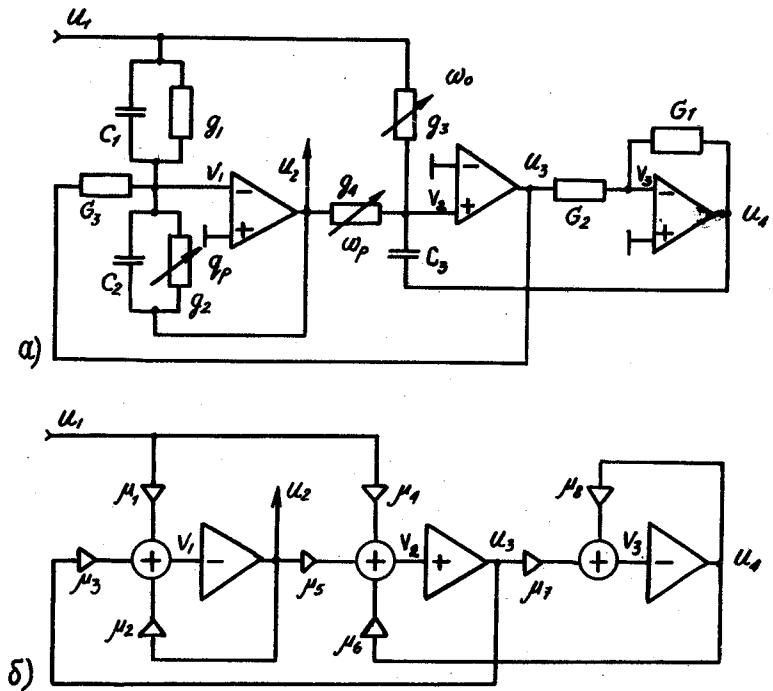


Рис. 2.26

Решение системы (2.39) относительно отношения  $U_2/U_1$ , определяет коэффициент передачи

$$K = \frac{U_2}{U_1} = - \frac{\mu_1 + \mu_4 \frac{\mu_3 \mu_8}{\mu_6 \mu_7}}{\mu_2 + \mu_5 \frac{\mu_3 \mu_8}{\mu_6 \mu_7}}. \quad (2.40)$$

Подстановка величин  $\mu_i$  (2.38) определяет передаточную функцию звена:

$$K(p) = - \frac{p^2 C_1 + p g_1 + g_3 \omega}{p^2 C_2 + p g_2 + g_4 \omega}, \quad \omega = \frac{G_1 G_3}{G_2 C_3}. \quad (2.41)$$

Из выражения (2.41) хорошо видно основное достоинство схемы: каждый коэффициент определяется одним параметром схемы, независимо от других коэффициентов. Резонансная частота и добротность равны соответственно

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g_4}{C_2} \omega}, \quad Q_p = \frac{C_2}{g_2} \omega_p. \quad (2.42)$$

Они могут настраиваться регулировкой  $g_4$  и  $g_2$ . Частота режекции (при условии  $\rho_1 = 0$ )

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_3}{C_1} \omega}. \quad (2.43)$$

Она регулируется резистором  $g_3$ .

Получение звена того или иного вида осуществляется выбором элементов прямой связи  $C_1, g_1, g_3$ . Для реализации ФНЧ выбирают  $C_1 = 0; g_1 = 0$ ; для ФВЧ —  $g_1 = 0; g_3 = 0$ ; для ПФ —  $C_1 = 0; g_3 = 0$ ; для РФ —  $g_1 = 0$ .

## 2.7. Звено второго порядка на основе конвертора Антонио

Одним из возможных путей реализации высокодобротных полосов передаточной функции является построение звеньев второго порядка на основе конверторной схемы Антонио (рис. 2.27). Ее полное входное сопротивление по отношению к внешнему источнику сигнала равно

$$Z_A = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}. \quad (2.44)$$

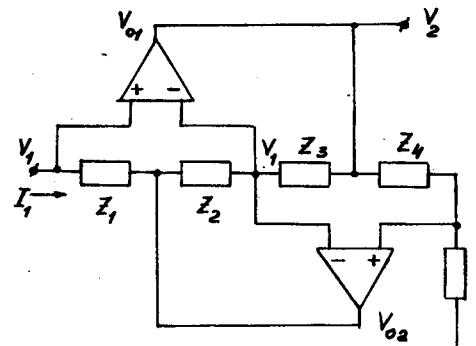


Рис. 2.27

Проведем анализ этой схемы. Пусть на ее входе действует напряжение  $V_1$ . Тогда в силу свойств идеальных ОУ, охваченных отрицательными обратными связями, на инвертирующих входах обоих ОУ и на сопротивлении  $Z_5$  также действует напряжение  $V_1$ . Поэтому можно составить систему уравнений, описывающую токи в схеме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_1 - V_{02}}{Z_1} &= I_1; \\ \frac{V_{02} - V_1}{Z_2} &= \frac{V_1 - V_{01}}{Z_3}; \\ \frac{V_{01} - V_1}{Z_4} &= \frac{V_1}{Z_5}. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Из последнего уравнения системы (2.45) следует, что напряжение на выходе первого ОУ связано с входным напряжением следующим образом:

$$V_{01} = V_1 \frac{Z_4 + Z_5}{Z_5}. \quad (2.46)$$

Используя соотношение (2.46) во втором уравнении (2.45), получаем связь между входным напряжением и напряжением на выходе второго ОУ:

$$V_{02} = V_1 \left( 1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5} \right). \quad (2.47)$$

Подставляя (2.47) в первое уравнение (2.45), окончательно находим входное сопротивление как отношение  $V_1/I_1$ , (2.44). Это замечательное свойство зависимости  $Z_A$  от отношения произведений полных сопротивлений схемы может быть использовано для конвертирования. Например, при  $Z_2 = 1/j\omega C$ ,  $Z_i = R$  ( $i = 1, 3, 4, 5$ ) получаем

$$Z_A = \frac{R^3}{(1/j\omega C)R} = j\omega R^2 C = j\omega L_3,$$

т.е. в данном случае схема работает как гиратор.

Рассмотренную схему можно использовать и как частотно-зависимый делитель напряжения с регулируемым масштабным усилением.

Во-первых, если  $Z_4 = R_4$ ,  $Z_5 = R_5$  — активные сопротивления, то согласно (2.46) напряжение на выходе схемы будет

$$V_2 = V_{01} = V_1 (R_4 + R_5)/R_5 = V_1 k, \quad (2.48)$$

где  $k > 1$ . Иными словами, выходное напряжение  $V_2$  отличается от входного  $V_1$  только масштабным множителем, величина которого может быть установлена подбором сопротивлений  $R_4, R_5$ .

Во-вторых, если источник сигнала подключить к схеме через некоторое сопротивление  $Z$ , то получим делитель напряжения на последовательно соединенных сопротивлениях  $Z$  и  $Z_A$ , где  $Z_A$  — входное сопротивление схемы. Используя частотные зависимости плеч делителя, можно добиться реализации необходимой передаточной функции второго порядка.

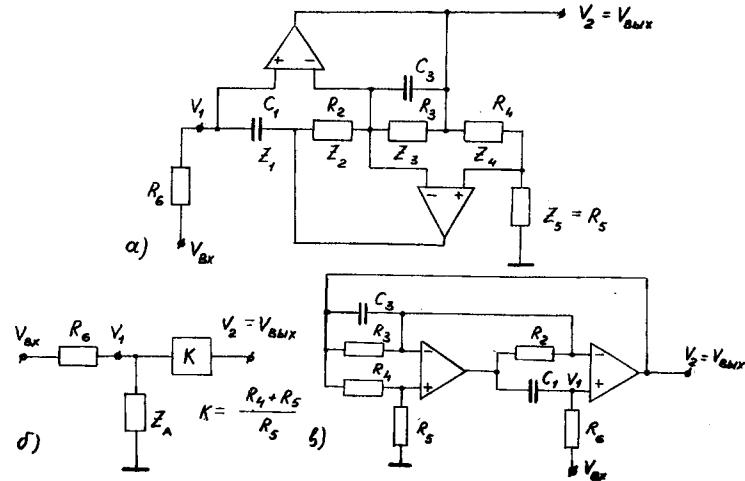


Рис. 2.28

Так, на рис. 2.28 представлен ФНЧ. Сопоставляя структуры схем, изображенных на рис. 2.27 и 2.28,а, видим, что  $Z_1=1/pC_1$ ,  $Z_2=R_2$ ,  $Z_3=R_3/(1+pR_3C_3)$ ,  $Z_4=R_4$ ,  $Z_5=R_5$ . Резистор  $R_6$ , подключенный к неинвертирующему входу первого ОУ, составляет с входным сопротивлением  $Z_A$  частотно-зависимый делитель напряжения, в котором

$$V_1 = V_{bx} \frac{Z_A}{R_6 + Z_A}$$

Принимая во внимание, что  $Z_4$  и  $Z_5$  – активные сопротивления, можно с учетом (2.48) схему, приведенную на рис. 2.28,а, упростить и представить в виде схемы, показанной на рис. 2.28,б. Из этой схемы следует, что

$$K(p) = \frac{V_{bx}}{V_{bx}} = k \frac{Z_A}{R_6 + Z_A}, \quad (2.49)$$

где

$$k = (R_4 + R_5)/R_5; \quad Z_A = \frac{R_3 R_5}{R_2 R_4} \frac{1}{pC_1(1+pR_3C_3)}$$

Раскрывая выражение (2.49), приходим к передаточной функции (2.23), в которой

$$\omega_p^2 = R_5/R_2 R_4 R_6 C_1 C_3; \quad (2.50)$$

$$Q_p = \omega_p R_3 C_3.$$

В ряде справочных пособий для удобства графического построения принято иное изображение рассмотренного ФНЧ (рис. 2.28,в). Нетрудно убедиться, что схемы, представленные на рис. 2.28,а и в, одинаковые.

На рис. 2.29,а и б приведены схемы ФНЧ в двух графических модификациях. Здесь  $Z_1=R_1$ ,  $Z_2=1/pC_2$ ,  $Z_3=R_3$ ,  $Z_4=R_4$ ,  $Z_5=R_5$ . Конденсатор  $C_6$ , резистор  $R_6$  и входное сопротивление  $Z_A$  представляют собой частотно-зависимый делитель напряжения. Проводя анализ этой схемы по аналогии с анализом схемы ФНЧ, можно убедиться, что передаточная функция цепи описывается общим выражением (2.26), в котором

$$k = (R_4 + R_5)/R_5; \quad Q_p = \omega_p R_6 C_6; \quad \omega_p^2 = R_4/R_1 R_3 R_5 C_2 C_6. \quad (2.51)$$

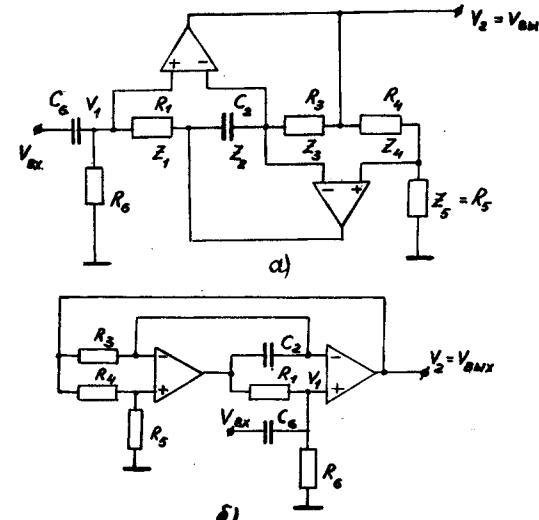


Рис. 2.29

На рис. 2.30 приведена схема ПФ. Его передаточная функция описывается выражением (2.28), в котором

$$k = (R_4 + R_5)/R_5; \quad Q_p = \omega_p R_6 C_6; \quad (2.52)$$

$$\omega_p^2 = R_4/R_1 R_3 R_5 C_2 C_6.$$

Усложнение схем звеньев второго порядка (появление второго ОУ и образование сложных обратных связей) позволяет уменьшить влияние разбросов параметров каждого отдельного элемента на АЧХ звена и достичь высокой доброкачественности реализуемых полосов.

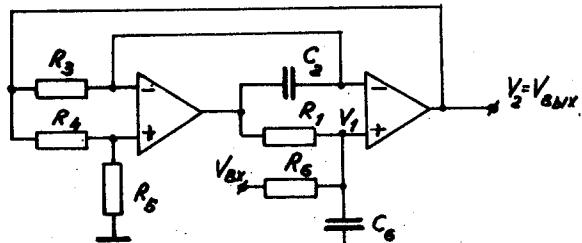


Рис. 2.30

2.8. Универсальное звено на основе схемы, моделирующей дифференциальное уравнение

Построение схем, моделирующих дифференциальное уравнение второго порядка, является одним из путей реализации высокодобротных фильтров. Основными элементами таких схем являются ОУ, позволяющие выполнять линейные операции сложения и интегрирования (рис. 2.31).

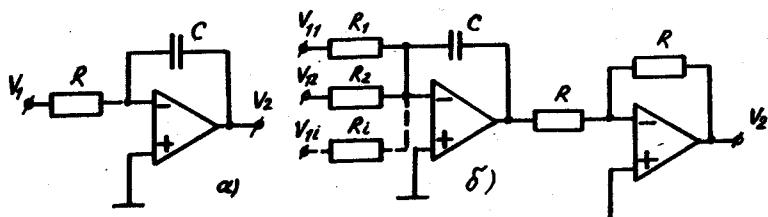


Рис. 2.31

Интегратор (рис. 2.31, а) выполняет операцию

$$u_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_1(t) dt$$

или (в изображениях)

$$V_2(p) = -\frac{V_1(p)}{pRC} = -\alpha \frac{V_1(p)}{p}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}. \quad (2.53)$$

Такой интегратор может служить и для сложения нескольких сигналов. Операция суммирования реализуется за счет увеличения числа входов. Последовательное соединение инвертора с интегратором позволяет получить неинвертированное значение интеграла входного сигнала. В случае реализации схемы, представленной на рис. 2.31, б, изображение выходного сигнала

$$V_2(p) = \frac{1}{pC} \sum_{i=1}^N \frac{V_{i1}(p)}{R_i}. \quad (2.54)$$

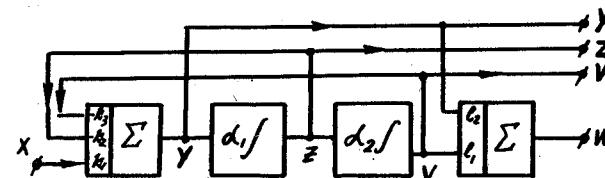


Рис. 2.32

Структурная схема звена, выполненного на интеграторах, приведена на рис. 2.32. Составим систему уравнений, описывающую его работу:

$$\begin{aligned} Y &= k_1 X - k_2 Z - k_3 V; \quad V = \alpha_2 \frac{Z}{p}; \\ Z &= \alpha_1 \frac{Y}{p}; \quad W = l_1 V + l_2 Y. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Подставив выражения для  $Z$  и  $V$  в первое уравнение (2.55), определим связь между  $Y$  и  $X$ :

$$Y = k_1 X - \alpha_1 k_2 \frac{Y}{p} - \alpha_1 \alpha_2 k_3 \frac{Y}{p^2}$$

Передаточная функция цепи от входа к выходу  $Y$  имеет вид

$$K_Y(p) = \frac{Y}{X} = \frac{k_1 p^2}{p^2 + \alpha_1 \alpha_2 p + \alpha_1 \alpha_2 k_3}. \quad (2.56)$$

Определяя последовательно передаточные функции от входа цепи  $Y$  к выходам  $Z$ ,  $V$ ,  $W$ , находим

$$K_Z = \frac{\alpha_1 k_1 p}{p^2 + \alpha_1 \alpha_2 p + \alpha_1 \alpha_2 k_3}; \quad (2.57)$$

$$K_V = \frac{\alpha_1 \alpha_2 k_1}{p^2 + \alpha_1 \alpha_2 p + \alpha_1 \alpha_2 k_3}; \quad (2.58)$$

$$K_W = \frac{l_2 k_1 \left( p^2 + \frac{1}{l_2} \alpha_1 \alpha_2 \right)}{p^2 + \alpha_1 \alpha_2 p + \alpha_1 \alpha_2 k_3}. \quad (2.59)$$

Сравнивая полученные выражения с передаточными функциями типовых звеньев, видим, что рассмотренная схема может работать в качестве любого из них: по выходу  $V$  — ФНЧ, по выходу  $Y$  — ФВЧ, по выходу  $Z$  — ПФ, по выходу  $W$  — РП с нулем передачи.

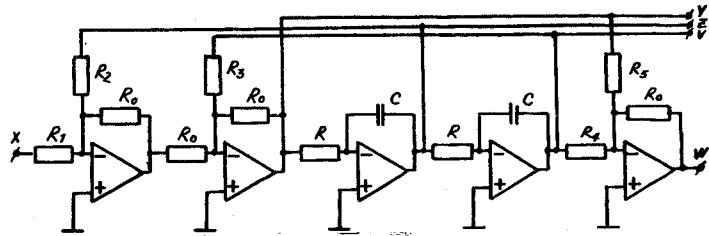


Рис. 2.33

Реализация схемы такого универсального фильтра на ОУ представлена на рис. 2.33. Параметры передаточных функций определяются следующим образом:

$$k_1 = \frac{R_0}{R_1}; k_2 = \frac{R_0}{R_2}; k_3 = \frac{R_0}{R_3}; \alpha_1 = \frac{1}{RC}; \alpha_2 = \frac{1}{RC};$$

$$t_1 = \frac{R_0}{R_4}; t_2 = \frac{R_0}{R_5}; \omega_p = \frac{\sqrt{R_0}}{\sqrt{R_3}RC}; \omega_z = \frac{\sqrt{R_5}}{RC\sqrt{R_4}}; q_p = \frac{R_2}{\sqrt{R_0R_3}}. \quad (2.60)$$

Регулировка частоты  $\omega_p$  осуществляется резистором  $R$ , частоты  $\omega_z$  – резистором  $R_4$  или  $R_5$ , добротности  $q_p$  – резистором  $R_2$ , масштабного коэффициента  $k$  – резистором  $R_1$ . Как видим, мы получили возможность независимой регулировки всех четырех параметров передаточной функции звена.

### 2.9. Реализация ARC -фильтров высокого порядка

Задача реализации полученной передаточной функции фильтра в классе активных  $RC$ -цепей приобретает особую сложность при росте порядка фильтра. В ходе разработки методов реализации ARC -фильтров высокого порядка выявились ограничения одних методов и возможности других.

Так, рассмотренный в предыдущем разделе метод реализации передаточной функции фильтра, казалось бы, обеспечивал общий и единий подход к решению задачи в случае ARC -фильтров высокого порядка. Но на практике выяснилось, что фильтры, реализованные методом моделирования дифференциального уравнения, имеют высокую чувствительность характеристик к изменению параметров элементов, а это требует применения элементов с малыми допусками и большой стабильностью.

Поэтому такое построение фильтров применяют только для реализации передаточной функции второго порядка.

Наиболее распространенным методом реализации ARC -фильтров высокого порядка является каскадный метод. Его основной идеей является сведение проектирования фильтра высокого порядка к проектированию ARC -схем первого и второго порядка.

Звенья ARC -фильтров второго порядка, рассмотренные в предыдущих разделах, непосредственно пригодны для каскадного соединения и построения фильтров высокого порядка. Поэтому задача реализации заданной передаточной функции распадается на две:

1) разложение передаточной функции на сомножители первого и второго порядка;

2) реализация сомножителей передаточной функции путем каскадного соединения звеньев первого и второго порядка.

Другими словами, задача разработки принципиальной схемы всего фильтра сводится к задаче составления схем определенных звеньев не выше второго порядка.

Достоинства метода заключаются в простоте расчета и настройки, что объясняется слабым взаимодействием между звеньями, а также в унификации схемных решений.

Вместе с тем появление активных элементов в каскадной схеме определяет ряд особенностей ее работы, связанных главным образом с нелинейностью вольт-амперной характеристики активного элемента (ограничением) и собственными шумами. При реализации любого звена, например, на ОУ, оказывается, что цепь сохраняет свойства линейности только в определенном диапазоне входных сигналов. Если же амплитуда входного сигнала превысит некоторое значение  $U_{bmax}$ , то в цепи возникают нелинейные искажения. Обладая определенным уровнем собственных шумов, активный элемент определяет минимальную амплитуду входного сигнала. При каскадном соединении звеньев, выполненных на активных элементах, можно привести все внутренние шумы к входу первого каскада с некоторой амплитудой  $U_{bmin}$ . Поэтому если амплитуда входного сигнала станет сравнимой с этой величиной, то при любом усилении выходной сигнал не будет различим на фоне шумов.

Для оценки реальной способности усилителя к усилению сигналов вводят понятие динамического диапазона, т.е. диапазона изменения амплитуд входного сигнала, при котором усилитель находится в линейном режиме, а выходной сигнал различим на фоне шумов. Этую же характеристику вводят для оценки различных вариантов построения ARC -фильтров.

Опыт проектирования ARC -фильтров показал, что вид разложения передаточной функции существенно влияет именно на динамический диапазон фильтра. Поэтому при выборе конкретного способа разложения функции добиваются максимизации динамического диапазона путем специальных последовательных процедур расчета.

Недостатком каскадного метода проектирования  $ARC$ -фильтров является относительно высокая чувствительность частотных характеристик фильтра к изменениям параметров элементов, что особенно сказывается при построении узкополосных фильтров выше восьмого порядка.

Такая большая чувствительность АЧХ  $ARC$ -фильтров по сравнению с АЧХ  $RLC$ -фильтров объясняется тем, что многозвенная лестничная  $LC$ -цепь представляет собой систему с множеством внутренних взаимных связей между соседними звенями. Каждый полюс передаточной функции такой цепи зависит от параметров всех элементов. Поэтому изменение параметров одного элемента вызывает смещение всех полюсов, но при этом АЧХ в целом изменяется меньше, чем при каскадной реализации фильтра, где элементы одного звена влияют только на одну пару полюсов.

Стремление уменьшить чувствительность АЧХ фильтра к разбросу параметров элементов путем введения дополнительных обратных связей привело к созданию  $ARC$ -фильтров с многопетлевыми обратными связями. Структурно такой фильтр можно представить как каскадно включенные звенья первого или второго порядка с дополнительными частотно-независимыми обратными связями между звенями.

Использование многопетлевых структур  $ARC$ -фильтров позволило не только повысить стабильность АЧХ, но и осуществить реализацию фильтров на базе одинаковых по схемам и характеристикам звеньев второго порядка.

Свое дальнейшее развитие идея увеличения взаимосвязей в структуре  $ARC$ -фильтров нашла в разработке метода операционной имитации  $LC$ -прототипа. В качестве промежуточного этапа здесь синтезируют резистивно-нагруженный  $LC$ -фильтр, используя методы, описанные ранее. Затем записывают систему уравнений, связывающих между собой физические переменные в схеме (токи и напряжения на элементах). Схему фильтра получают, моделируя математические операции, производимые элементами  $L$  и  $C$  над физическими переменными.

Поясним основную идею метода. Вспомним, что в реактивных элементах  $L$  и  $C$  ток и напряжение связаны между собой оператором интегрирования. Так, емкость преобразует втекающий в нее ток в напряжение, величина которого определяется интегралом  $u_c = \frac{1}{C} \int i dt$ .

Напряжение на индуктивности связано с протекающим током таким же оператором  $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$ . Поэтому для  $LC$ -прототипа на основе про-

веденного описания реальных физических переменных в ветвях и узлах схемы фильтра можно с учетом интегральной связи между физическими переменными на реактивных элементах провести моделирование этой связи с помощью интеграторов на ОУ. Естественно, что все физические переменные линейно заменяются модельными переменными, имеющими одинаковую размерность напряжения, что связано с выбранным способом моделирования на ОУ.

Полученную модель токов и напряжений в  $LC$ -прототипе с помощью специально разработанных схемных преобразований можно свести к некоторой эквивалентной схеме, содержащей интеграторы, сумматоры и масштабные множители. Построенная таким образом схема связывает входное напряжение с напряжением выхода так же, как они связаны между собой в  $LC$ -прототипе.

Метод операционной имитации – новый, развивающийся. Главным его достоинством является обеспечение малой чувствительности АЧХ реализованного  $ARC$ -фильтра к изменению параметров элементов, которую можно сравнить с чувствительностью лучших  $RLC$ -фильтров.

Итак, к основным методам реализации  $ARC$ -фильтров высокого порядка относятся:

- а) метод каскадной реализации;
- б) метод многопетлевой реализации;
- в) метод операционной имитации  $LC$ -прототипа.

Каждый из указанных методов имеет свои особенности расчета, схемотехнические решения, чувствительность и устойчивость, трудоемкость регулировки. Поэтому сопоставление  $ARC$ -фильтров, реализованных различными методами, – весьма сложная задача. Так, в настоящее время не существует единого мнения о соотношении чувствительностей, достигаемых при различных методах реализации. Их сравнение имеет смысл только в конкретных случаях, когда строго учитываются условия решаемой задачи.

Таким образом, описанные методы реализации  $ARC$ -фильтров высокого порядка лишь указывают возможные направления решения общей задачи построения электрических фильтров в виде активных  $RC$ -цепей. Несмотря на то, что эта область радиоэлектроники бурно развивается и в последнее время появилось большое количество справочников по  $ARC$ -фильтрам, исчерпывающего решения задачи реализации  $ARC$ -фильтров еще не получено, и она ждет своих новых исследователей.

Эллиптические фильтры

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ФИЛЬТРОВ БАТТЕРВОРТА, ЧЕБЫШЕВА, ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ

Фильтры Баттервортса

Фильтры Чебышева,  $n = 3$

$n$	$-\alpha$	$\pm\beta$	$B$	$C$
2	0,707	0,707	I,414	I,000
3	0,500 I,000	0,866 -	I,000 I,000	I,000 -
4	0,383 0,924	0,924 0,383	0,765 I,848	I,000 I,000
5	0,309 0,809 I,000	0,951 0,588 -	0,618 I,618 I,000	I,000 I,000 -
6	0,259 0,707 0,966	0,966 0,707 0,259	0,518 I,414 I,932	I,000 I,000 I,000

$a_n$	$-\alpha$	$\pm\beta$	$B$	$C$
0,1	0,485 0,969	I,206 -	0,969 0,969	I,690 -
0,5	0,313 0,626	I,022 -	0,626 0,626	I,142 -
1,0	0,297 0,494	0,966 -	0,494 0,494	0,994 -
2,0	0,189 0,369	0,922 -	0,369 0,369	0,886 -
3,0	0,149 0,299	0,904 -	0,299 0,299	0,839 -

Фильтры Чебышева,  $n = 4, 5, 6$

$a_n$	$n = 4$		$n = 5$		$n = 6$	
	$B$	$C$	$B$	$C$	$B$	$C$
0,1	0,528 I,276	I,330 0,623	0,383 0,872 0,539	I,195 0,636 -	0,229 0,627 0,856	I,129 0,696 0,263
0,5	0,351 0,847	I,060 0,356	0,224 0,586 0,362	I,036 0,477 -	0,155 0,424 0,580	I,023 0,590 0,157
1,0	0,279 0,674	0,987 0,279	0,179 0,468 0,289	0,988 0,429 -	0,124 0,340 0,464	0,991 0,558 0,125
3,0	0,170 0,411	0,903 0,196	0,110 0,287 0,178	0,936 0,377 -	0,076 0,209 0,285	0,955 0,522 0,089

$a_3$	$n = 3$							
	$a_n = 0,5$				$a_n = 1,0$			
	$R_3$	$A$	$B$	$C$	$R_3$	$A$	$B$	$C$
30	I,92	4,750 -	0,530 0,699	I,149 -	I,73	3,871 -	0,411 0,560	I,016 -
40	2,71	9,630 -	0,581 0,659	I,146 -	I,42	7,608 -	0,455 0,524	I,008 -
50	3,90	20,16 -	0,605 0,641	I,144 -	3,46	15,80 -	0,476 0,508	I,000 -

$a_3$	$n = 4$							
	$a_n = 0,5$				$a_n = 3,0$			
	$R_3$	$A$	$B$	$C$	$R_3$	$A$	$B$	$C$
30	I,32	I,948 8,564	0,946 0,220	0,528 I,058	I,15	I,417 5,212	0,481 0,087	0,344 0,958
40	I,63	3,010 I,491	0,907 0,272	0,448 I,061	I,35	2,019 8,993	0,455 0,119	0,274 0,938
50	2,07	4,924 20,16	0,882 0,305	0,406 I,063	I,66	3,137 I,5,67	0,437 0,140	0,238 0,924

$a_3$	$n = 5$							
	$a_n = 0,5$				$a_n = 1,0$			
	$R_3$	$A$	$B$	$C$	$R_3$	$A$	$B$	$C$
30	I,10	I,334 2,422	0,511 0,94	0,732 I,024	I,10	I,248 2,158	0,402 0,068	0,694 I,002
40	I,27	I,723 3,534	0,551 0,132	0,639 I,029	I,22	I,572 3,II3	0,438 0,100	0,597 0,999
50	I,48	2,375 5,302	0,570 0,162	0,579 I,032	I,41	2,126 4,632	0,454 0,125	0,535 0,996

Полюсы:  $p = \alpha \pm j\beta$ ;  $n$  - порядок фильтра;  $a_n$  - затухание в полосе пропускания, дБ;  $a_3$  - затухание в полосе задерживания, дБ.

Коэффициенты  $A, B, C$ : звено первого порядка  $\frac{1}{p+\theta}$ ; звено второго порядка с полюсами  $\frac{1}{(p^2+\theta p+C)}$ ; звено второго порядка с полюсами и нулями  $\frac{(p^2+A)}{(p^2+\theta p+C)}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров/Пер. с нем.;  
Под ред. Н.Н. Слепова. - М.: Радио и связь, 1983.
2. Лем Г. Аналоговые и цифровые фильтры/Пер. с англ.;  
Под ред. И.Н. Теплюка. - М.: Мир, 1982.
3. Справочник по расчету и проектированию *ARC*-схем/Под ред.  
А.А. Ляннэ. - М.: Радио и связь, 1984.
4. Капустян В.И. Активные *RC*-фильтры высокого по-  
рядка. - М.: Радио и связь, 1985.
5. Джонсон Д., Джонсон Дж., Мур Г. Справоч-  
ник по активным фильтрам/Пер. с англ.; Под ред. И.Н. Теплюка. -  
М.: Энергатомиздат, 1983.
6. Мопиц Г., Хорн П. Проектирование активных фильт-  
ров/Пер. с англ.; Под ред. И.Н. Теплюка. - М.: Мир, 1984.
7. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники/  
Под ред. А.А. Куликовского. - М.: Энергия, 1977. - Т. 2.
8. Хьюлсман Л.П., Аллен Ф.Е. Введение в теорию  
и расчет активных фильтров/Пер. с англ.; Под ред. А.Е. Знаменско-  
го. - М.: Радио и связь, 1984.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
1. Вопросы теории синтеза частотно-избирательных фильтров .....	4
1.1. Постановка задачи синтеза фильтра .....	4
1.2. Передаточная функция реализуемого фильтра.	
Функция фильтрации .....	7
1.3. Фильтры Баттервортса .....	10
1.4. Фильтры Чебышева .....	12
1.5. Эллиптические фильтры .....	13
1.6. Диаграммы полюсов и нулей "классических" фильтров	15
1.7. Как пользоваться справочниками по фильтрам .....	20
1.8. Преобразование базовой передаточной функции в передаточную функцию реального ФНЧ .....	24
1.9. Частотные преобразования. Переход к фильтрам ФВЧ, ПФ, РФ .....	25
1.10. Переходные характеристики фильтров Баттервортса, Чебышева и эллиптических. Фильтры Бесселя .....	32
2. Вопросы реализации электрических фильтров .....	35
2.1. Принципы реализации <i>RLC</i> -фильтров .....	35
2.2. Особенности реализации полосовых <i>RLC</i> -фильтров ..	37
2.3. Основные направления реализации <i>ARC</i> -фильтров ..	41
2.4. Гираторные схемы .....	43
2.5. Типовые звенья второго порядка .....	49
2.6. Биквад - биквадратичное звено .....	59
2.7. Звено второго порядка на основе конвертора Антонио .....	62
2.8. Универсальное звено на основе схемы, моделирую- щей дифференциальное уравнение .....	66
2.9. Реализация <i>ARC</i> -фильтров высокого порядка .....	68
Приложение .....	72
Литература .....	74