

Задание 2. Анализ временных и частотных характеристик периодических сигналов.

Пример 2.1.

По известному спектру импульсного сигнала $s(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$ найти спектр периодического сигнала $s_T(t)$, показанного на рис. 2.1:

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - k \cdot T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha(t-k \cdot T)} u(t - k \cdot T), \quad (2.1)$$

где T – период повторения сигнала.

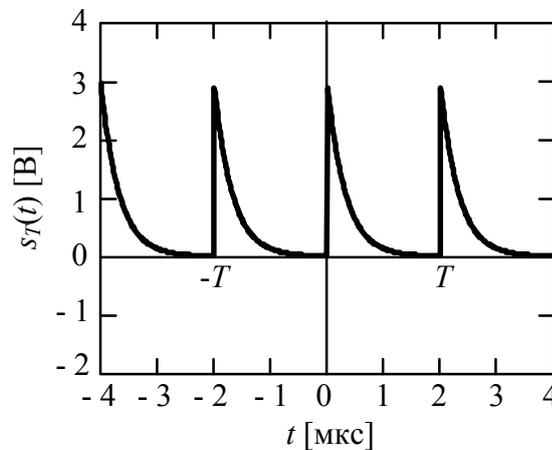


Рис. 2.1. Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$.
 $A = 3 \text{ В}$, $T = 2 \text{ мкс}$, $\alpha = \pi \cdot 10^6 \text{ рад/сек}$.

Представить и изобразить спектр сигнала $S_T(f)$ в виде:

– действительной $\text{Re}\{S_T(f)\}$ и мнимой $\text{Im}\{S_T(f)\}$ частей;

– модуля $|S_T(f)|$ (амплитудно-частотного спектра) и аргумента $\arg\{S_T(f)\}$

(фаза-частотного спектра).

Проанализировать полученные графики.

Решение.

Спектр аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ может быть определен коэффициентами ряда Фурье:

$$S_T[m] = \frac{1}{T} \int_T s_T(t) e^{-j \frac{2\pi m t}{T}} dt, \quad (\text{В}) \quad (2.2)$$

или по известному спектру аналогового импульсного сигнала $S(f)$:

$$S_T[m] = \frac{1}{T} S\left(\frac{m}{T}\right), \quad (\text{В}), \quad (2.3)$$

$$S_T(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_T[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), \quad (\text{В} \cdot \text{с}). \quad (2.4)$$

Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$ связан со своим спектром $S_T[m]$ выражением ряда Фурье:

$$s_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_T[m] e^{j\frac{2\pi m t}{T}}, \quad (\text{В}). \quad (2.5)$$

Для определения спектра сигнала $s_T(t)$ (2.1) воспользуемся известным спектром одиночной экспоненты:

$$s(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t) \Leftrightarrow S(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f} \quad (2.6)$$

и формулой (2.3):

$$S_T[m] = \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{\alpha + j2\pi \frac{m}{T}} = \frac{A}{\alpha T + j2\pi m}. \quad (2.7)$$

Представим полученный спектр периодического сигнала в квадратурной и показательной форме:

$$S_T[m] = \frac{A}{\sqrt{(\alpha T)^2 + (2\pi m)^2}} \cdot e^{-j \arctg \frac{2\pi m}{\alpha T}} = \frac{A\alpha T}{(\alpha T)^2 + (2\pi m)^2} - j \frac{A2\pi m}{(\alpha T)^2 + (2\pi m)^2}. \quad (2.8)$$

Действительная и мнимая части спектра сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 2.2, амплитудный и фазовый спектры сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 2.3.

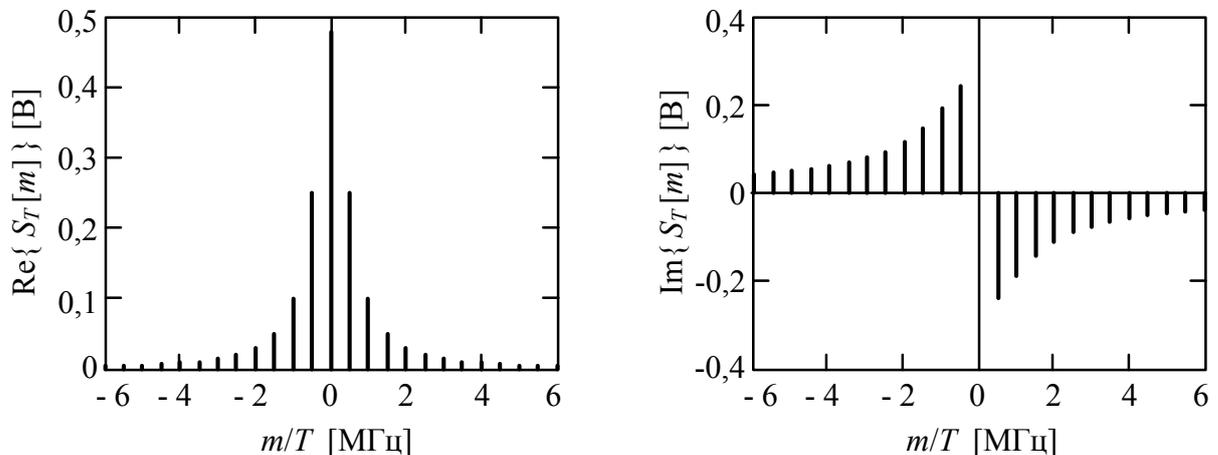


Рис. 2.2. Действительная и мнимая части спектра периодического сигнала.

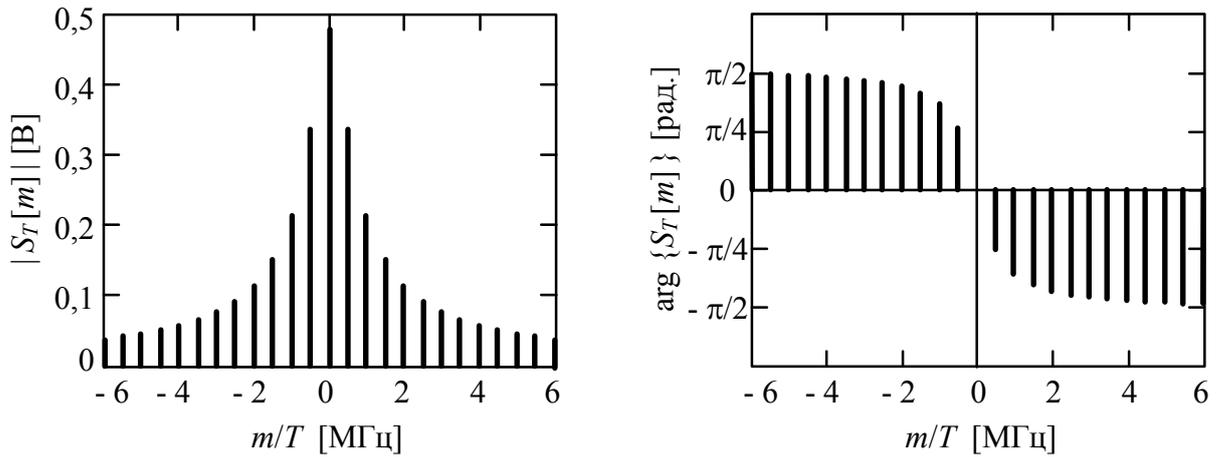


Рис. 2.3. Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала.

Из рисунков видно, что для действительной части спектра и амплитудного спектра периодического сигнала соблюдается свойство четной симметрии:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{S_T[m]\} &= \operatorname{Re}\{S_T[-m]\}, \\ |S_T[m]| &= |S_T[-m]|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

а для мнимой части спектра и фазового спектра – свойство нечетной симметрии:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{S_T[m]\} &= -\operatorname{Im}\{S_T[-m]\}, \\ \arg S_T[m] &= -\arg S_T[-m]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Согласно свойству площади преобразования Фурье для периодического сигнала $s_T(t)$:

$$S[0] = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(t) dt = \frac{A}{\alpha T} \approx 0,48, \text{ (В)}. \quad (2.11)$$

Пример 2.2.

Определить и построить спектр периодического сигнала $s_T(t)$, показанного на рис. 2.4, в трех формах:

- амплитудно-фазовой форме;
- квадратурной форме;
- комплексной форме.

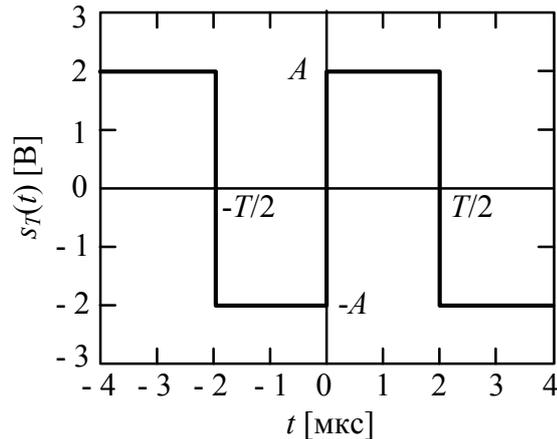


Рис. 2.4. Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$. $A = 2$ В, $T = 4$ мкс.

Проанализировать полученные графики. Показать, как изменятся графики спектра сигнала $s_T(t)$ при его сдвиге на $\tau = 1$ мкс влево.

Решение.

Рассмотрим процедуру отыскания коэффициентов разложения в ряд Фурье периодического сигнала, показанного на рис. 2.4.

1). Квадратурная форма.

В квадратурной форме периодический сигнал $s_T(t)$ может быть представлен в следующем виде:

$$s_T(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) + b_m \sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) \right\}, \quad (2.12)$$

где T – период сигнала, a_0 – постоянная составляющая, a_m , b_m – амплитуды синусной и косинусной компонент сигнала на частоте, кратной частоте повторения сигнала m/T .

Постоянная составляющая периодического сигнала $s_T(t)$ определяется как средняя за период площадь сигнала:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(t) dt, \text{ (В)}. \quad (2.13)$$

Для заданного сигнала $s_T(t)$ постоянная составляющая равна:

$$a_0 = A \cdot \frac{T}{2} - A \cdot \frac{T}{2} = 0. \quad (2.14)$$

Амплитуды синусной и косинусной (квадратурных) компонент сигнала определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_T s_T(t) \cdot \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt, \text{ (В)}, \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_T s_T(t) \cdot \sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt, \text{ (В)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Определим коэффициенты a_m и b_m для сигнала $s_T(t)$:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \left[- \int_{-\frac{T}{2}}^0 A \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} A \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt \right] = \\ &= \frac{2A}{T} \left[- \frac{\sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right)}{2\pi m \frac{1}{T}} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{\sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right)}{2\pi m \frac{1}{T}} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{T} \left[- \int_{-\frac{T}{2}}^0 A \cdot \sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt \right] = \\ &= \frac{A}{\pi m} \left[\cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] = \frac{2A}{\pi m} \cdot [1 - \cos(\pi m)] = \\ &= \begin{cases} \frac{4A}{\pi m}, & \text{нечётное } m, \\ 0, & \text{чётное } m. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Графики спектра сигнала $s_T(t)$ в квадратурной форме показаны на рис. 2.5.

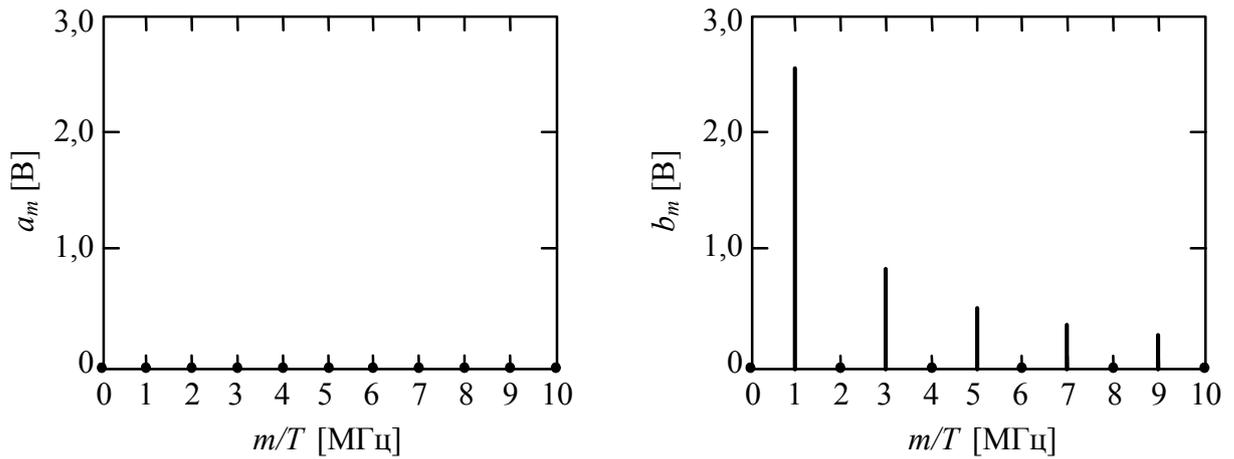


Рис. 2.5. Квадратурная форма спектра периодического сигнала $s_T(t)$.

2). Комплексная форма.

Периодический сигнал $s_T(t)$ может быть представлен с помощью комплексных коэффициентов C_m следующим образом:

$$s_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot e^{j2\pi m \frac{t}{T}}, \quad (2.18)$$

где коэффициенты C_m определяются по формуле:

$$C_m = \frac{1}{T} \int_T s_T(t) \cdot e^{-j2\pi m \frac{t}{T}} dt. \quad (2.19)$$

Найдем разложение заданного сигнала в ряд Фурье по комплексным коэффициентам:

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{T} \left[- \int_{-\frac{T}{2}}^0 A \cdot e^{-j2\pi m \frac{t}{T}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j2\pi m \frac{t}{T}} dt \right] = \\ &= \frac{A}{-j2\pi m} \left[-e^{-j2\pi m \frac{t}{T}} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + e^{-j2\pi m \frac{t}{T}} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] = -j \frac{A}{2\pi m} \cdot [1 - e^{j\pi m} - e^{-j\pi m} + 1] = \\ &= -j \frac{A}{\pi m} \cdot [1 - \cos(\pi m)] = -j \frac{2A}{\pi m} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi m}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Модуль и аргумент комплексных коэффициентов C_m спектра сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 2.6.

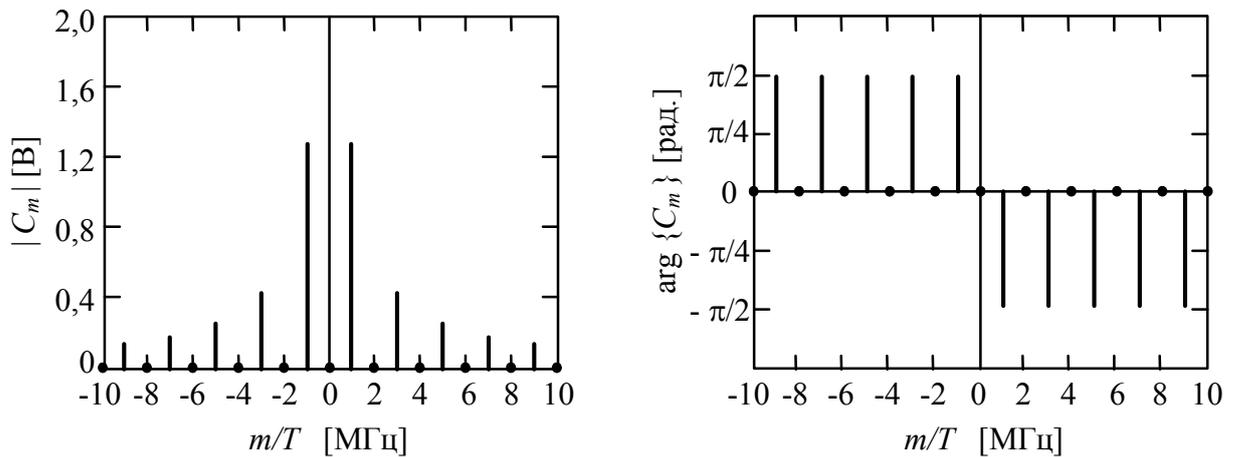


Рис. 2.6. Комплексная форма спектра периодического сигнала $s_T(t)$.

3). Амплитудно-фазовая форма.

В амплитудно-фазовой форме периодический сигнал $s_T(t)$ может быть представлен в следующем виде:

$$s(t) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \cos\left(2\pi m \frac{t}{T} + \varphi_m\right), \quad (2.21)$$

где A_0 – постоянная составляющая, A_m , φ_m – амплитуда и фаза гармоники на частоте, кратной частоте повторения сигнала m/T , T – период сигнала.

Амплитудные A_m и фазовые φ_m коэффициенты разложения в ряд Фурье определяются следующим образом:

$$A_m = 2|C_m| = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \quad (2.22)$$

$$\varphi_m = \arg(C_m) = -\arctan \frac{b_m}{a_m}. \quad (2.23)$$

Найдем амплитудные и фазовые коэффициенты заданного сигнала $s_T(t)$:

$$A_m = \begin{cases} \frac{4A}{\pi m}, & \text{нечётное } m, \\ 0, & \text{чётное } m. \end{cases}, \quad (2.24)$$

$$\varphi_m = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{нечётное } m, \\ 0, & \text{чётное } m. \end{cases} \quad (2.25)$$

Спектр сигнала $s_T(t)$ в амплитудно-фазовой форме показан на рис. 2.7.

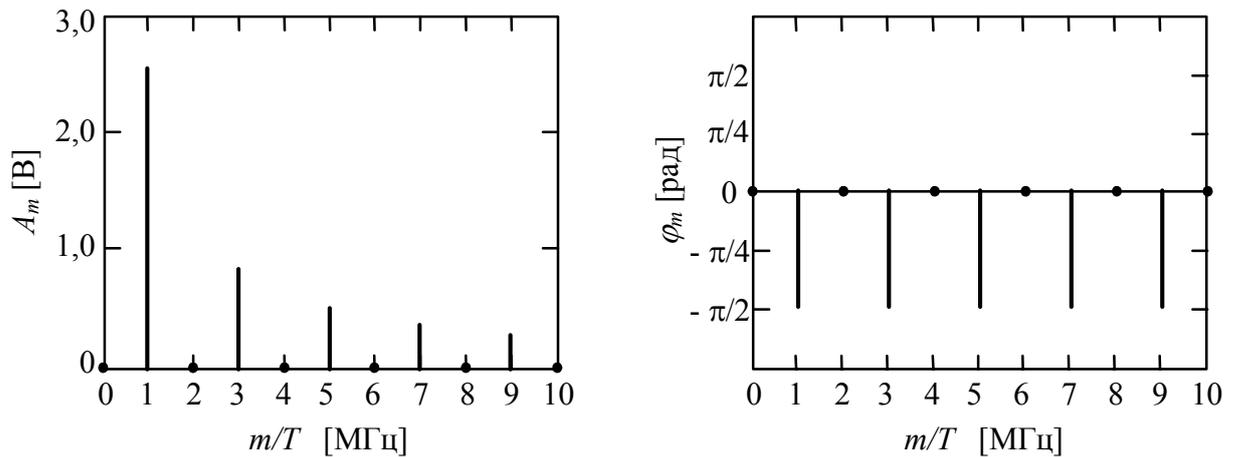


Рис. 2.7. Амплитудно-фазовая форма спектра периодического сигнала $s_T(t)$.

Проведем анализ полученных графиков. Исходный сигнал, показанный на рис. 2.4, обладает свойством нечетной симметрии и нечетно-гармонической симметрии:

$$\begin{aligned} s_T(t) &= -s_T(-t), \\ s_T(t) &= -s_T\left(t - \frac{T}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

следовательно спектр этого сигнала должен обладать следующими особенностями:

$$\begin{aligned} a_m &\equiv 0, \\ b_m &\equiv 0, \quad \text{для четных } m, \\ b_m &\neq 0, \quad \text{для нечетных } m, \end{aligned} \quad (2.27)$$

т.е. спектр должен быть чисто мнимым и не должен быть равен нулю только для нечетных гармоник, что хорошо видно на графиках, показанных на рис. 2.5-2.7.

Теперь рассмотрим, как изменятся графики спектров сигнала $s_T(t)$ при его сдвиге на $\tau = 1$ мкс влево. График функции сдвинутого сигнала показан на рис. 2.8.

Как видно из рисунка, сигнал $s_T(t)$ стал четным, но при этом у него сохранилось свойство нечетно-гармонической симметрии. Следовательно, спектр сигнала должен стать действительной функцией, у которой существуют только нечетные гармоники сигнала.

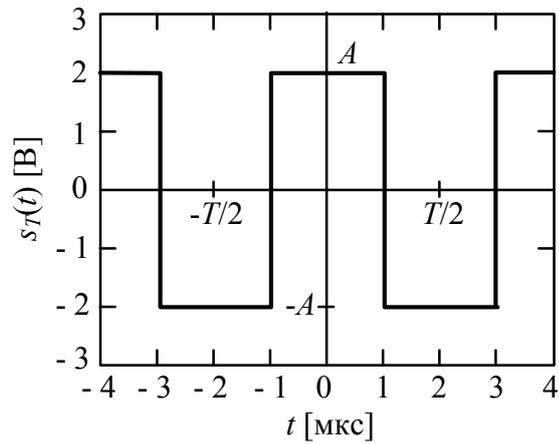


Рис. 2.8. Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$, сдвинутый на 1 мкс влево.

Согласно свойствам преобразования Фурье, сдвиг (задержка) сигнала в спектральной области приводит к умножению спектра на комплексную экспоненту:

$$\begin{aligned}
 s_T(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} S_T[m] \\
 s_T\left(t + \frac{T}{4}\right) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} S_T[m] \cdot e^{j2\pi \frac{mT}{4}} = S_T[m] \cdot e^{j\frac{\pi}{2}m}.
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Таким образом, графики спектра сигнала $s_T(t)$ в квадратурной форме будут иметь вид, показанный на рис. 2.9.

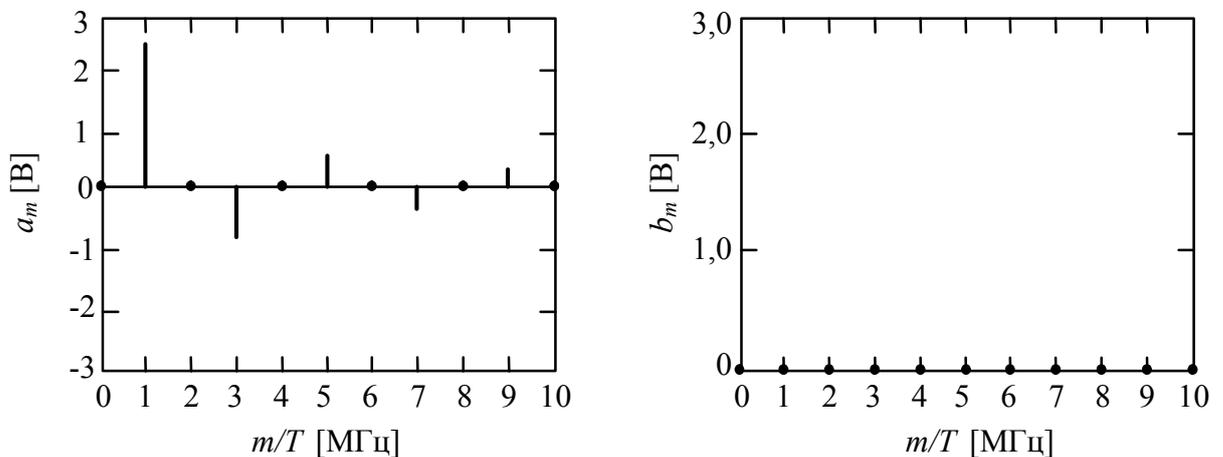


Рис. 2.9. Квадратурная форма спектра четного периодического сигнала $s_T(t)$.

Модуль комплексных коэффициентов C_m спектра сигнала четного сигнала не будет отличаться от амплитудного спектра исходного сигнала $s_T(t)$, фаза коэффициентов C_m изменится на $\pi/2$. Комплексная форма спектра четного периодического сигнала $s_T(t)$ показана на рис. 2.10.

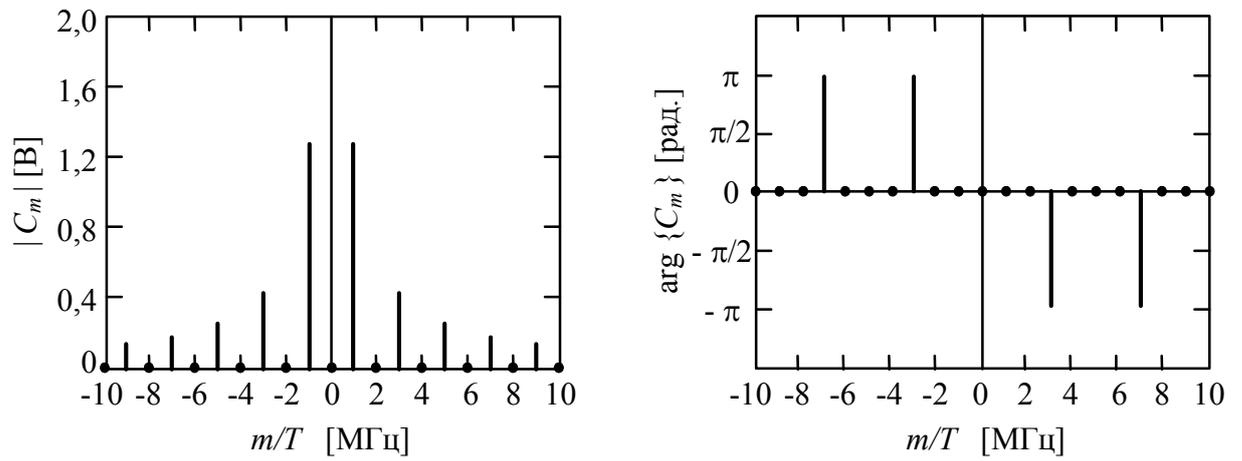


Рис. 2.10. Комплексная форма спектра четного периодического сигнала $s_T(t)$.

Спектр сдвинутого сигнала $s_T(t)$ в амплитудно-фазовой форме показан на рис. 2.11.

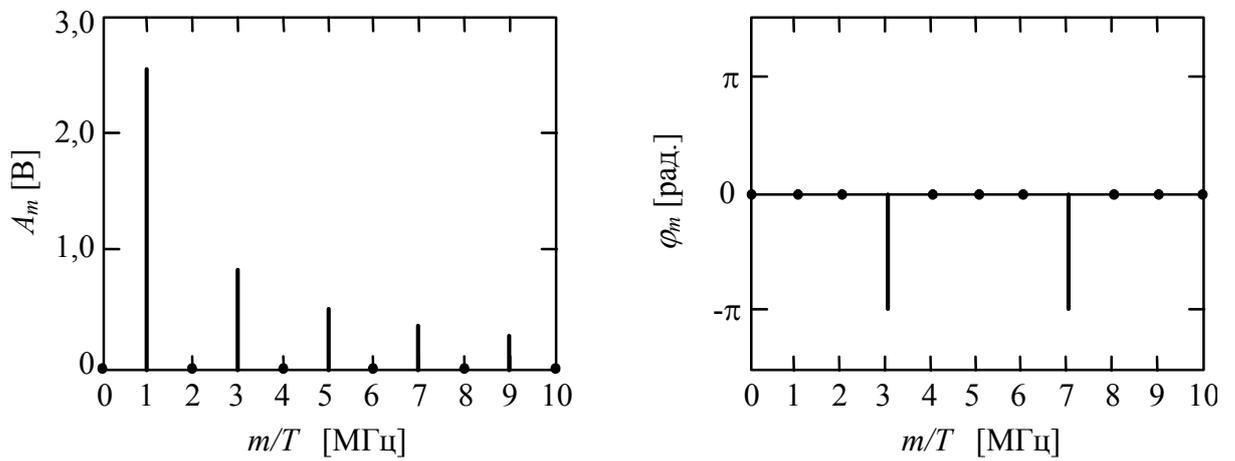


Рис. 2.11. Амплитудно-фазовая форма спектра четного периодического сигнала $s_T(t)$.