Задание 1. *Анализ временных и частотных характеристик импульсных сигналов.*

Пример 1.1.

С помощью свойств преобразования Фурье найти аналитическое выражение спектра аналогового импульсного сигнала $s(t)$, изображенного на рис. 1.1.

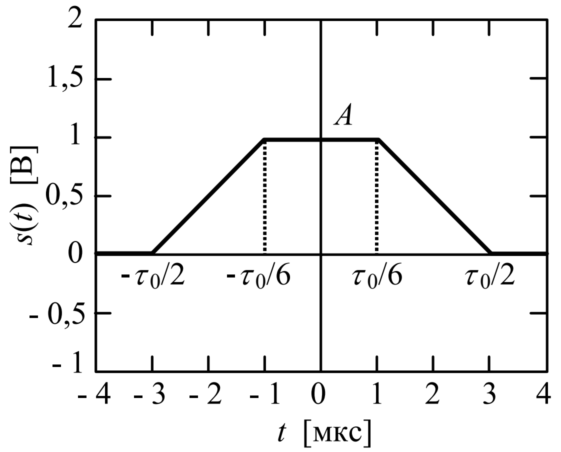

Рис. 1.1. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$*.* $A = 1$ *В,* $\tau_0 = 6$ *мкс.*

Изобразить спектр сигнала $S(f)$ в квадратурной и амплитудно-фазовой формах. Проанализировать полученные графики.

Решение.

В общем случае для отыскания спектральной функции (спектра) $S(f)$ аналоговых импульсных сигналов используется прямое преобразование Фурье:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f t} dt, \text{ [В·с]}. \tag{1.1}$$

Обратное преобразование Фурье позволяет найти сигнал по его спектру:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi f t} df, \text{ [В]}. \tag{1.2}$$

На практике определение спектра импульсных сигналов непосредственно с помощью выражения (1.1) часто приводит к значительным вычислительным трудностям. В этом случае удобнее воспользоваться известными спектрами сигналов простой формы и свойствами преобразования Фурье, основными из которых является свойство линейности, задержки сигнала, интегрирования и дифференцирования сигнала, и другие.

Рассмотрим процедуру отыскания спектра аналогового импульсного сигнала, показанного на рис. 1.1. Аналитическое выражение сигнала $s(t)$ имеет следующий вид:

$$s(t)=\begin{cases}\dfrac{3A}{2}+\dfrac{3A}{\tau_0}t, & -\dfrac{\tau_0}{2}\le t<-\dfrac{\tau_0}{6},\\ A, & -\dfrac{\tau_0}{6}\le t<\dfrac{\tau_0}{6},\\ \dfrac{3A}{2}-\dfrac{3A}{\tau_0}t, & \dfrac{\tau_0}{6}\le t\le\dfrac{\tau_0}{2},\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau_0}{2}.\end{cases} \tag{1.3}$$

При отыскании аналитического выражения спектра импульсных сигналов, состоящих из кусочно-линейных функций, удобно пользоваться свойством интегрирования и дифференцирования сигнала. Продифференцируем сигнал $s(t)$ по времени:

$$s'(t)=\frac{d\,s(t)}{dt}=\begin{cases}\dfrac{3A}{\tau_0}, & -\dfrac{\tau_0}{2}\le t<-\dfrac{\tau_0}{6},\\ -\dfrac{3A}{\tau_0}t, & \dfrac{\tau_0}{6}\le t\le\dfrac{\tau_0}{2},\\ 0, & \text{остальные } t.\end{cases} \tag{1.4}$$

График функции полученного сигнала $s'(t)$ показан на рис. 1.2.

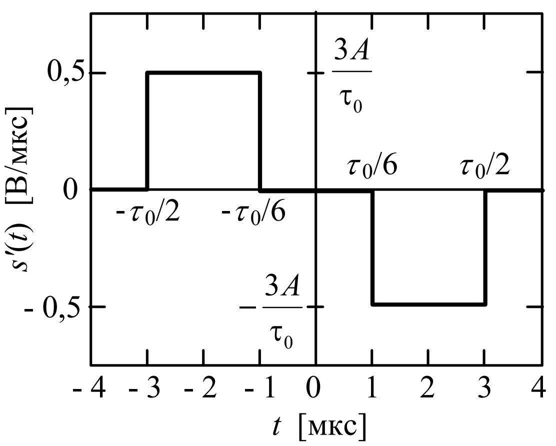

Рис. 1.2. Первая производная сигнала $s(t)$ по времени.

Из рис. 1.2 видно, что сигнал $s'(t)$ можно представить в виде суммы двух задержанных прямоугольных импульсов:

$$s'(t)=\frac{3A}{\tau_0}\cdot \mathrm{rect}_\tau\left(t+\frac{\tau_0}{3}\right)-\frac{3A}{\tau_0}\cdot \mathrm{rect}_\tau\left(t-\frac{\tau_0}{3}\right), \qquad (1.5)$$

где $\mathrm{rect}_\tau(t)$ – прямоугольный импульс длительностью $\tau = \tau_0/3$, определяемый следующим соотношением:

$$\mathrm{rect}_\tau(t)=\begin{cases}1, & -\dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & \text{остальные } t.\end{cases} \qquad (1.6)$$

Спектр прямоугольного импульса амплитудой A_0 и длительностью τ определяется следующим соотношением:

$$A_0\cdot \mathrm{rect}_\tau(t)\overset{F}{\Leftrightarrow} \mathrm{A}_0\tau\cdot\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}=A_0\tau\cdot \mathrm{sinc}(\pi f\tau), \qquad (1.7)$$

где $\mathrm{sinc}(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ – функция типа «sinc».

Используя свойство спектров для задержанных сигналов:

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & S(f) \\ s(t-T) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & S(f)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fT}, \end{array} \qquad (1.8)$$

где T – задержка исходного сигнала $s(t)$, можно записать выражение для спектра сигнала $s'(t)$:

$$\begin{aligned} s'(t)\overset{F}{\Leftrightarrow}&\frac{3A}{\tau_0}\cdot\frac{\tau_0}{3}\cdot \mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{\tau_0}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi f\frac{\tau_0}{3}}-\frac{3A}{\tau_0}\cdot\frac{\tau_0}{3}\cdot \mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{\tau_0}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f\frac{\tau_0}{3}}= \\ &=A\cdot \mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{\tau_0}{3}\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{j2\pi f\frac{\tau_0}{3}}-\mathrm{e}^{-j2\pi f\frac{\tau_0}{3}}\right). \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Полученное выражение можно упростить с помощью формул Эйлера:

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{e}^{j\varphi}+\mathrm{e}^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi=\frac{\mathrm{e}^{j\varphi}-\mathrm{e}^{-j\varphi}}{2j}. \qquad (1.10)$$

Таким образом, выражение спектра сигнала $s'(t)$ примет вид:

$$s'(t)\overset{F}{\Leftrightarrow} S'(f)=j2A\cdot \mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{\tau_0}{3}\right)\cdot\sin\left(2\pi f\frac{\tau_0}{3}\right). \qquad (1.11)$$

Для нахождения аналитического выражения сигнала $s(t)$ воспользуемся свойством интегрирования сигнала по времени:

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & S(f) \\ \int\limits_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{S(f)}{j2\pi f}+\dfrac{S(0)}{2}\delta(f). \end{array} \tag{1.12}$$

Окончательно получаем выражение для спектра сигнала $s(t)$:

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{S'(f)}{j2\pi f}+\frac{S'(0)}{2}\cdot\delta(f) = \\ &= \frac{j2A\cdot \operatorname{sinc}\left(\pi f\dfrac{\tau_0}{3}\right)\cdot \sin\left(2\pi f\dfrac{\tau_0}{3}\right)}{j2\pi f}+0\cdot\delta(f) = \\ &= \frac{2}{3}A\tau_0\cdot \operatorname{sinc}\left(\pi f\frac{\tau_0}{3}\right)\cdot \operatorname{sinc}\left(2\pi f\frac{\tau_0}{3}\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Для отображения комплексной функции $S(f)$ ее можно представить в *показательной форме* через модуль и аргумент:

$$S(f)=|S(f)|\cdot e^{j\arg S(f)}, \tag{1.14}$$

либо в *квадратурной форме* через действительную и мнимую части:

$$S(f)=\operatorname{Re}\{S(f)\}+j\operatorname{Im}\{S(f)\}. \tag{1.15}$$

Модуль спектральной функции $S(f)$, называемый *амплитудно-частотным спектром* (АЧС), представляет собой действительную функцию, обладающую свойством четной симметрии:

$$\text{АЧС}\Rightarrow |S(f)|=|S(-f)|. \tag{1.16}$$

Аргумент спектральной функции $S(f)$, называемый *фазо-частотным спектром* (ФЧС), обладает свойством нечетной симметрии:

$$\text{ФЧС}\Rightarrow \arg S(f)=-\arg S(-f). \tag{1.17}$$

Аналогичными свойствами обладают действительная и мнимая части спектральной функции:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{S(f)\}&=\operatorname{Re}\{S(-f)\}, \\ \operatorname{Im}\{S(f)\}&=-\operatorname{Im}\{S(-f)\}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Показательная и квадратурная формы спектральной функции сигнала связаны между собой следующими соотношениями:

$$\text{АЧС}: \quad \left|S(f)\right| = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\{S(f)\}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{S(f)\}\right]^2}\ , \tag{1.19}$$

$$\text{ФЧС}: \quad \arg S(f) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{Im}\{S(f)\}}{\mathrm{Re}\{S(f)\}}, & \mathrm{Re}\{S(f)\} > 0, \\ \mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{Im}\{S(f)\}}{\mathrm{Re}\{S(f)\}} + \pi, & \mathrm{Re}\{S(f)\} < 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Поскольку исходный сигнал $s(t)$ обладает свойством четной симметрии:

$$s(t) = s(-t), \tag{1.21}$$

спектр $S(f)$ является действительной функцией, т.е. $\mathrm{Re}\{S(f)\} = S(f)$.

На рис. 1.3 и 1.4 представлены действительная часть спектра сигнала, амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)$ соответственно.

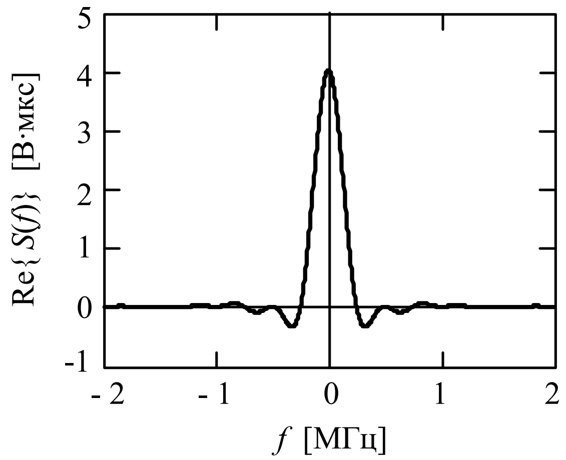

Рис. 1.3. Действительная часть спектра сигнала s(t).

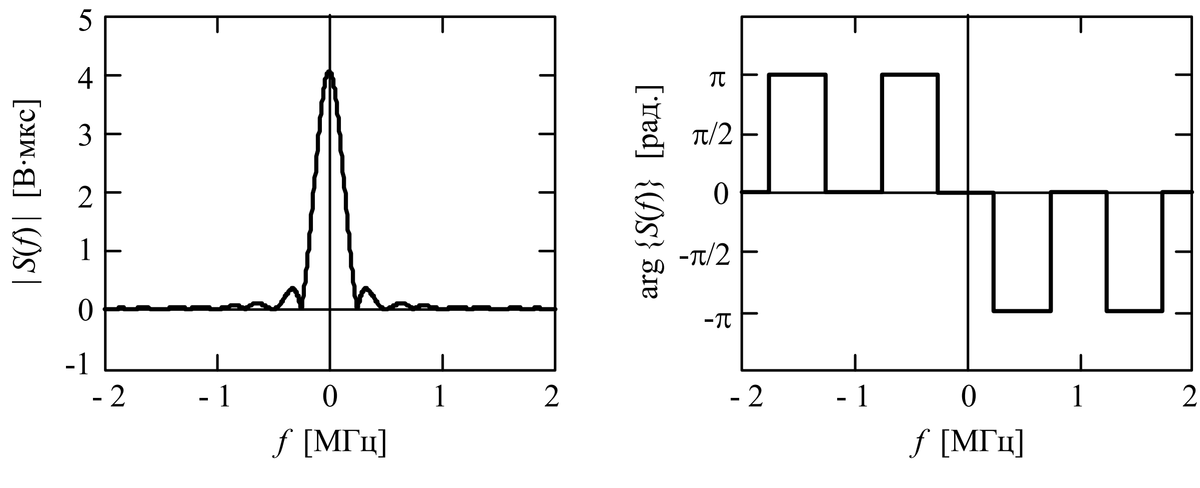

Рис. 1.4. Амплитудный и фазовый спектры сигнала s(t).

Проанализируем полученный спектр $S(f)$. В амплитудном спектре сигнала $s(t)$ значение $S(0)$ может быть определено по свойству площади преобразования Фурье как площадь сигнала $s(t)$ (площадь трапеции):

$$S(0)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt = A\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_0}{3}+\tau_0\right)=\frac{2}{3}A\tau_0 = 4\ \text{[В·мкс]}. \qquad (1.22)$$

Пример 1.2.

С помощью свойств преобразования Фурье найти аналитическое выражение спектра аналогового импульсного сигнала $s(t)$, изображенного на рис. 1.5.

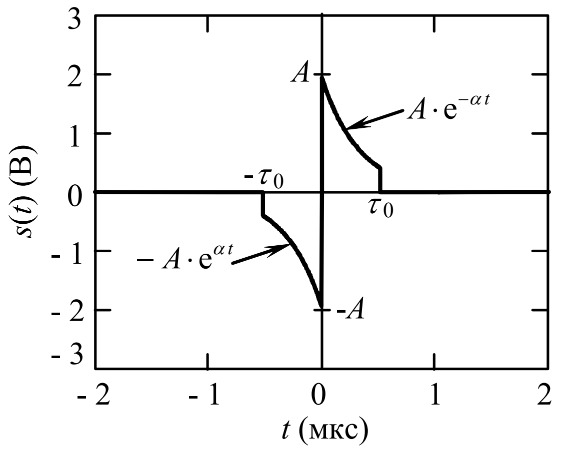

Рис. 1.5. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$.
A = 2 В, τ_0 = 0,5 мкс, $\alpha = \pi\cdot 10^6$ рад/сек.

Изобразить спектр сигнала $S(f)$ в квадратурной и амплитудно-фазовой формах. Проанализировать полученные графики.

Решение.

Из рисунка видно, что аналитическое выражение сигнала $s(t)$ может быть описано как сумма двух усеченных экспонент, одна из которых инвертирована во времени:

$$s(t)=s_1(t)-s_1(-t), \qquad (1.23)$$

где сигнал $s_1(t)$ определяется выражением:

$$s_1(t)=\begin{cases} A\cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}, & 0<t<\tau_0, \\ 0, & t<0,\, t>\tau_0. \end{cases} \qquad (1.24)$$

Сигнал $s_1(t)$ можно выразить через табличный сигнал односторонней экспоненты (см. рис. 1.6):

$$s_1(t) = A \cdot x(t) - B \cdot x(t - \tau_0), \qquad (1.25)$$

где $x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot u(t)$, $B = A \cdot x(t)\big|_{t=\tau_0} = A \cdot x(\tau_0)$, $u(t)$ – единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда), определяемая соотношением:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \qquad (1.26)$$

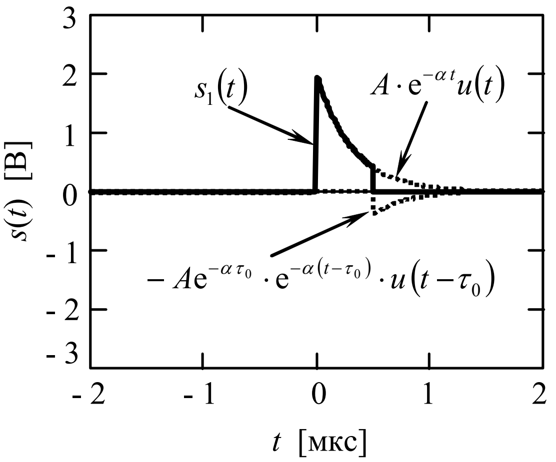

Рис. 1.6. Формирование сигнала $s_3(t)$.

Подставив выражение (1.25) в (1.23), получим временную функцию искомого сигнала $s(t)$:

$$s(t) = A \cdot x(t) - B \cdot x(t - \tau_0) - A \cdot x(-t) + B \cdot x(-t + \tau_0). \qquad (1.27)$$

Теперь по известному спектру экспоненциального сигнала $x(t)$

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(f) = \frac{A}{j2\pi f + \alpha} \qquad (1.28)$$

с использованием свойства линейности спектров и инвертирования сигнала во времени:

$$\begin{aligned} a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) \quad &\overset{F}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot S_1(f) + b \cdot S_2(f), \\ s(-t) \quad &\overset{F}{\Leftrightarrow} \quad S^*(f), \end{aligned} \qquad (1.29)$$

где «*» означает комплексное сопряжение, можно найти спектр сигнала $S(f)$:

$$
\begin{aligned}
S(f) &= A\cdot X(f) - B\cdot X(f)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau_0} - A\cdot X^*(f) + B\cdot X^*(f)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi f\tau_0} = \\
&= A\cdot\left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} - \frac{1}{\alpha - j2\pi f}\right) + A\cdot x(\tau_0)\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{j2\pi f\tau_0}}{\alpha - j2\pi f} - \frac{\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau_0}}{\alpha + j2\pi f}\right) = \\
&= A\cdot\frac{-j4\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + A\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau_0}\cdot\left(\frac{(\alpha + j2\pi f)\cdot \mathrm{e}^{j2\pi f\tau_0} - (\alpha - j2\pi f)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau_0}}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}\right) = \\
&= A\cdot\frac{\left[\alpha\left(\mathrm{e}^{j2\pi f\tau_0} - \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau_0}\right) + j2\pi f\left(\mathrm{e}^{j2\pi f\tau_0} + \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau_0}\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{-\alpha\tau_0} - j4\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = \\
&= j2\pi A\cdot\frac{\left[\dfrac{\alpha}{2\pi}\sin(2\pi f\tau_0) + 2f\cos(2\pi f\tau_0)\right]\cdot \mathrm{e}^{-\alpha\tau_0} - 2f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

Полученное выражение позволяет оценить особенности спектра сигнала $s(t)$. Спектр $S(f)$ является чисто мнимым, что соответствует свойству спектров для нечетных временных функций. Мнимая часть спектра сигнала $s(t)$ показана на рис. 1.7, амплитудный и фазовый спектры сигнала показаны на рис. 1.8.

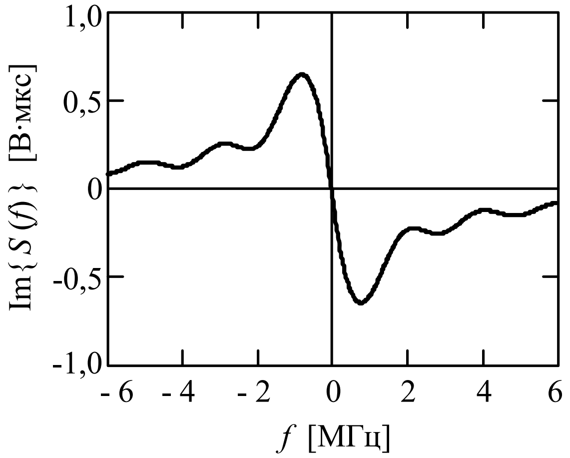

Рис. 1.7. Мнимая часть спектра импульсного аналогового сигнала s(t).

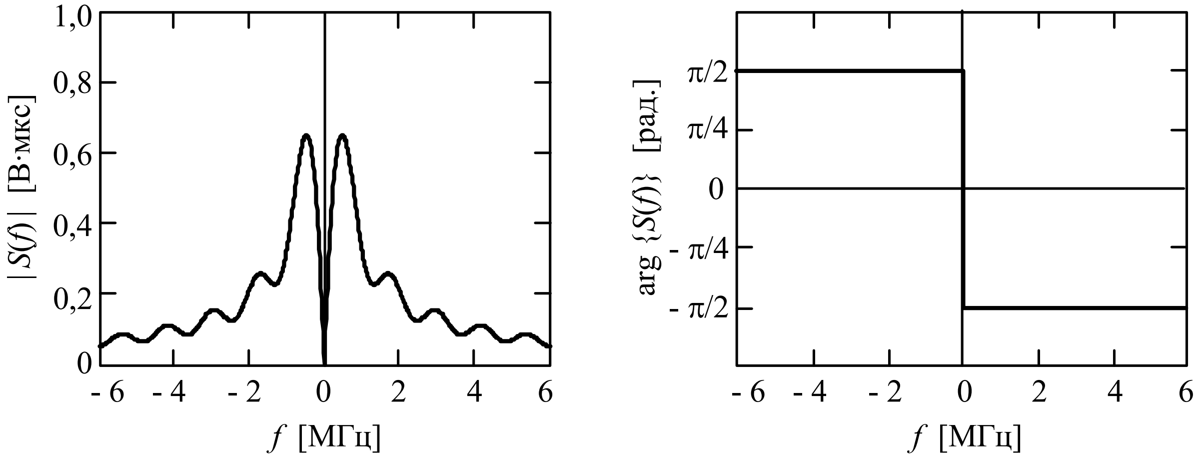

Рис. 1.8. Амплитудный и фазовый спектры сигнала s(t).

С помощью свойства площади преобразования Фурье можно проверить правильность нахождения спектра сигнала:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt = 0\,. \qquad (1.31)$$