

Лекция №18.

Анализ цифровых фильтров

([1] стр. 367-374)

1. Каузальные и некаузальные фильтры

Каузальный (причинный) фильтр — это фильтр, сигнал на выходе которого зависит только от текущих и прошедших сигналов на его входе.

Импульсная характеристика каузального фильтра удовлетворяет условию $g(n) = 0$ при $n < 0$, которое означает, что реакция фильтра не может предшествовать приложенному воздействию. Например, фильтр, описываемый разностным уравнением (см. пример 7 лекции 17) $y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) + 0,1y(n-1) + 0,2y(n-2)$, удовлетворяет приведенному выше определению и, следовательно, является каузальным. Его импульсная характеристика $g(n) = \delta_T(n) - 2\delta_T(n-1) + \delta_T(n-2) + 0,1g(n-1) + 0,2g(n-2)$ определена при $n \geq 0$.

Некаузальным называются фильтры, выходные сигналы которых зависят также от будущих входных сигналов. Например, сглаживающий фильтр, сигнал на выходе которого определяется скользящим усреднением по пяти соседним значениям,

описывается разностным уравнением $y(n) = \frac{1}{5}(x(n-2) + x(n-1) + x(n) + x(n+1) + x(n+2))$.

Такой фильтр нельзя физически реализовать в режиме реального времени, так при вычислении очередного значения $y(n)$ необходимо знать будущие значения $x(n+1)$ и $x(n+2)$ входного воздействия. Импульсная характеристика фильтра определяется

выражением $g(n) = \frac{1}{5}(\delta_T(n-2) + \delta_T(n-1) + \delta_T(n) + \delta_T(n+1) + \delta_T(n+2))$. Она может быть

определена при любых значениях n . Некаузальные фильтры можно использовать на практике в тех случаях, когда процедура фильтрации происходит не в реальном времени, а выполняется над хранящимися в памяти последовательностями конечной длины. То есть некаузальные фильтры – фильтры с памятью

2. Анализ каузальных цифровых фильтров

2.1. Постановка задачи.

Анализ каузальных цифровых фильтров, как и анализ любой радиотехнической цепи, сводится к определению сигнала на её выходе, когда известен входной сигнал и схема цепи. При решении этой задачи сначала определяют характеристики цепи. Затем, используя один из методов анализа, находят выходной сигнал. При этом мы выбираем тот метод, которым данную задачу решить проще. В рамках этой лекции мы рассмотрим три метода: дискретной свёртки, Z – преобразования и разностных уравнений.

2.2. Метод дискретной свёртки

Этот метод является аналогом метода интеграла свёртки, используемого при анализе аналоговых линейных цепей. При этом используется импульсная характеристика цепи $g(t)$. Тогда сигнал на выходе цепи $y(t)$ определяется с помощью интеграла свёртки

$$y(t) = \int_0^t x(v)g(t-v)dv.$$

Перейдём от непрерывного времени к дискретному: $t \rightarrow nt$, $v \rightarrow mv$. Тогда интегрирование заменится суммированием, и мы получим формулу дискретной свёртки

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n x(mT)g(nT - mT).$$

Здесь $y(nT)$ - отсчёты выходного сигнала, $x(mT)$ - отсчёты входного сигнала, $g(nT - mT)$ - отсчёты импульсной характеристики.

При анализе можно в формуле дискретной свёртки опустить интервал дискретизации T . Тогда

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)g(n - m).$$

Метод дискретной свёртки удобнее использовать при анализе трансверсальных фильтров, у которых импульсная характеристика имеет конечное число отсчётов.

Пример 1

Найдите сигнал на выходе трансверсального фильтра, изображённого на рисунке 18.1, если на его входе действует сигнал $x(n) = 1(n) - 1(n - 3)$.

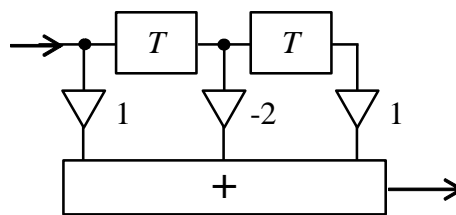


Рис.18.1

Решение

Импульсная характеристика фильтра (см. пример 5 лекции 17)

$$g(n) = \delta_T(n) - 2\delta_T(n - 1) + \delta_T(n - 2).$$

Входной сигнал $x(n) = 1(n) - 1(n - 3)$ приведён на рисунке 18.2

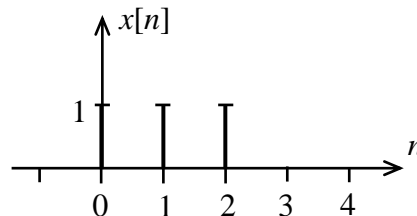


Рис.18.2

$$\text{Тогда } y(n) = \sum_{m=0}^2 \delta_T(n - m) - 2\delta_T(n - m - 1) + \delta_T(n - m - 2).$$

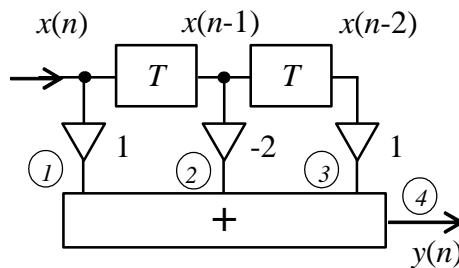
Найдём по этой формуле несколько первых отсчётов сигнала:

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{m=0}^2 \delta_T(0 - m) - 2\delta_T(0 - m - 1) + \delta_T(0 - m - 2) = \underbrace{\delta_T(0 - 0) - 2\delta_T(0 - 1) + \delta_T(0 - 2)}_{m=0} + \\ &+ \underbrace{\delta_T(0 - 1) - 2\delta_T(0 - 2) + \delta_T(0 - 3)}_{m=1} + \underbrace{\delta_T(0 - 2) - 2\delta_T(0 - 3) + \delta_T(0 - 4)}_{m=2} = \\ &= \underbrace{\delta_T(0) - 2\delta_T(-1) + \delta_T(-2)}_{m=0} + \underbrace{\delta_T(-1) - 2\delta_T(-2) + \delta_T(-3)}_{m=1} + \underbrace{\delta_T(-2) - 2\delta_T(-3) + \delta_T(-4)}_{m=2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(1) &= \sum_{m=0}^2 \delta_T(1-m) - 2\delta_T(1-m-1) + \delta_T(1-m-2) = \underbrace{\delta_T(1-0) - 2\delta_T(1-1) + \delta_T(1-2)}_{m=0} + \\
&+ \underbrace{\delta_T(1-1) - 2\delta_T(1-2) + \delta_T(1-3)}_{m=1} + \underbrace{\delta_T(1-2) - 2\delta_T(1-3) + \delta_T(1-4)}_{m=2} = \\
&= \underbrace{\delta_T(1) - 2\delta_T(0) + \delta_T(-1)}_{m=0} + \underbrace{\delta_T(0) - 2\delta_T(-1) + \delta_T(-2)}_{m=1} + \underbrace{\delta_T(-1) - 2\delta_T(-2) + \delta_T(-3)}_{m=2} = \\
&= -2 + 1 = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(2) &= \sum_{m=0}^2 \delta_T(2-m) - 2\delta_T(2-m-1) + \delta_T(2-m-2) = \underbrace{\delta_T(2-0) - 2\delta_T(2-1) + \delta_T(2-2)}_{m=0} + \\
&+ \underbrace{\delta_T(2-1) - 2\delta_T(2-2) + \delta_T(2-3)}_{m=1} + \underbrace{\delta_T(2-2) - 2\delta_T(2-3) + \delta_T(2-4)}_{m=2} = \\
&= \underbrace{\delta_T(2) - 2\delta_T(1) + \delta_T(0)}_{m=0} + \underbrace{\delta_T(1) - 2\delta_T(0) + \delta_T(-1)}_{m=1} + \underbrace{\delta_T(0) - 2\delta_T(-1) + \delta_T(-2)}_{m=2} = \\
&= 1 - 2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Проверим правильность расчётов по структурной схеме фильтра. Для этого пронумеруем контрольные точки схемы и определим, как будет проходить сигнал через эти точки.



Результаты сведём в таблицу

Таблица.

| n | Контрольные точки | | | |
|-----|-------------------|----|---|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | -2 | 0 | -1 |
| 2 | 1 | -2 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | -2 | 1 | -1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Из приведённой таблицы следует, что значения в четвёртой точке схемы – выходной сигнал $y(n)$ - совпадают с рассчитанными значениями. Следовательно, решение верное.

2.3. Метод Z – преобразования

Этот метод является аналогом операторного метода, используемого при анализе аналоговых линейных цепей. При этом используется системная функция цепи.

Алгоритм решения этим методом состоит из трёх действий:

- 1) Найдём Z – изображение входного сигнала с помощью прямого преобразования входного сигнала $\hat{X}(z) = Z(x(n))$
- 2) Найдём Z – изображение выходного сигнала, умножив Z – изображение входного сигнала на системную функцию цифрового фильтра $\hat{Y}(z) = \hat{X}(z) \cdot \hat{K}(z)$
- 3) Найдём выходной сигнал с помощью обратного преобразования Z – изображения выходного сигнала $y(n) = Z^{-1}(\hat{Y}(z))$

Пример 2

Найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, изображённого на рисунке 18.3, если на его входе действует сигнал $x(n) = 1(n) - 1(n-3)$.

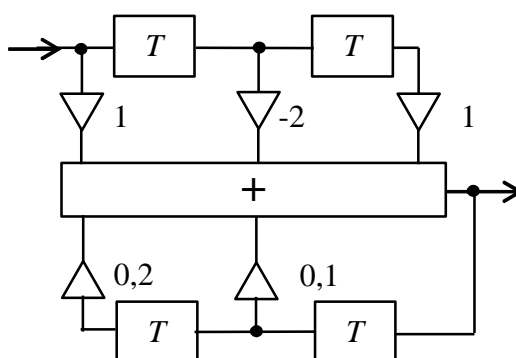


Рис. 18.3

Решение

Системная функция этого фильтра $\hat{K}(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-0,5)(z+0,4)}$ (см. пример 8 лекции 17).

- 1) Найдём Z – изображение входного сигнала, для этого воспользуемся Z – изображением дискретной функции Хевисайда $1(n)$ $Z(1(n)) = \frac{z}{z-1}$ и свойством запаздывания. Тогда

$$\hat{X}(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} \cdot z^{-3} = \frac{z - z^{-2}}{z-1} = \frac{z^3 - 1}{z^2(z-1)} = \frac{(z-1)(z^2 + z + 1)}{z^2(z-1)} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

- 2) Найдём Z – изображение выходного сигнала

$$\hat{Y}(z) = \hat{X}(z) \cdot \hat{K}(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2} \cdot \frac{(z-1)^2}{(z-0,5)(z+0,4)} = \frac{(z^2 + z + 1)(z-1)^2}{z^2(z-0,5)(z+0,4)}$$

- 3) Выходной сигнал найдём с помощью обратного Z – преобразования. Для этого воспользуемся вычетами.

Условие $\lim_{z \rightarrow 0} \hat{Y}(z) = 0$ не выполняется, поскольку $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2 + z + 1)(z - 1)^2}{z^2(z - 0,5)(z + 0,4)} = -\infty$. Поэтому

преобразуем $\hat{Y}(z)$

$$\begin{aligned} \hat{Y}(z) &= \frac{(z^2 + z + 1)(z - 1)^2}{z^2(z - 0,5)(z + 0,4)} = \frac{z^4 + z^3 + z^2 - 2z^3 - 2z^2 - 2z + z^2 + z + 1}{z^2(z - 0,5)(z + 0,4)} = \frac{z^4 - z^3 - z + 1}{z^2(z - 0,5)(z + 0,4)} = \\ &= \frac{z^4 - z^3}{z^2(z - 0,5)(z + 0,4)} - \frac{z - 1}{z^2(z - 0,5)(z + 0,4)} = \frac{z(z - 1)}{(z - 0,5)(z + 0,4)} - \frac{z(z - 1)}{(z - 0,5)(z + 0,4)} \cdot z^{-3} \end{aligned}$$

Обозначим $\hat{Y}_1(z) = \frac{z(z - 1)}{(z - 0,5)(z + 0,4)}$. Тогда $\hat{Y}(z) = \hat{Y}_1(z) - \hat{Y}_1(z) \cdot z^{-3}$

Условие $\lim_{z \rightarrow 0} \hat{Y}_1(z) = 0$ выполняется. Найдём $y_1(n) = Z^{-1}\left(\hat{Y}_1(z)\right)$ с помощью вычетов.

Функция $\hat{Y}_1(z) = \frac{z(z - 1)}{(z - 0,5)(z + 0,4)}$ имеет два полюса первой кратности $z_{I1} = 0,4$,

$z_{I2} = -0,5$. Тогда $y_1(n) = res_1 + res_2$

$$res_1 = \lim_{z \rightarrow 0,5} \left((z - 0,5) \cdot \frac{z(z - 1)}{(z - 0,5)(z + 0,4)} \cdot z^{n-1} \right) = \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{z - 1}{(z + 0,4)} z^n = -\frac{5}{9} 0,5^n \cdot 1(n)$$

$$res_2 = \lim_{z \rightarrow -0,4} \left((z + 0,4) \cdot \frac{z(z - 1)}{(z - 0,5)(z + 0,4)} \cdot z^{n-1} \right) = \lim_{z \rightarrow -0,4} \frac{z - 1}{(z - 0,5)} z^n = \frac{14}{9} (-0,4)^n \cdot 1(n)$$

$$y_1(n) = res_1 + res_2 = \left(-\frac{5}{9} 0,5^n + \frac{14}{9} (-0,4)^n \right) \cdot 1(n).$$

Учитывая свойство запаздывания, имеем $y(n) = y_1(n) - y_1(n - 3)$. Тогда

$$y(n) = \left(-\frac{5}{9} 0,5^n + \frac{14}{9} (-0,4)^n \right) \cdot 1(n) - \left(-\frac{5}{9} 0,5^{n-3} + \frac{14}{9} (-0,4)^{n-3} \right) \cdot 1(n - 3).$$

Найдём по этой формуле несколько первых отсчётов сигнала:

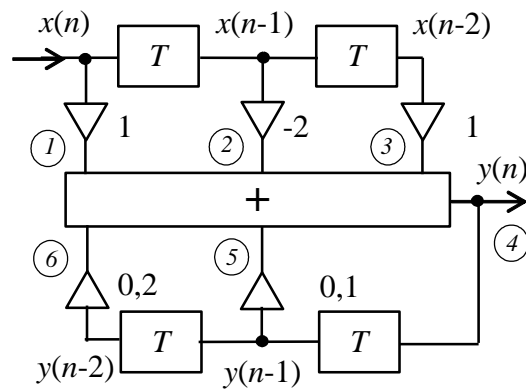
$$y(0) = \left(-\frac{5}{9} 0,5^0 + \frac{14}{9} (-0,4)^0 \right) \cdot 1(0) - \left(-\frac{5}{9} 0,5^{-3} + \frac{14}{9} (-0,4)^{-3} \right) \cdot 1(-3) = 1,$$

$$y(1) = \left(-\frac{5}{9} 0,5 + \frac{14}{9} (-0,4) \right) \cdot 1(1) - \left(-\frac{5}{9} 0,5^{-2} + \frac{14}{9} (-0,4)^{-2} \right) \cdot 1(-2) = -0,9,$$

$$y(2) = \left(-\frac{5}{9} 0,5^2 + \frac{14}{9} (-0,4)^2 \right) \cdot 1(2) - \left(-\frac{5}{9} 0,5^{-1} + \frac{14}{9} (-0,4)^{-1} \right) \cdot 1(-1) = 0,11,$$

$$y(3) = \left(-\frac{5}{9} 0,5^3 + \frac{14}{9} (-0,4)^3 \right) \cdot 1(3) - \left(-\frac{5}{9} 0,5^0 + \frac{14}{9} (-0,4)^0 \right) \cdot 1(0) = -1,169.$$

Проверим правильность расчётов по структурной схеме фильтра. Для этого пронумеруем контрольные точки схемы и определим, как будет проходить сигнал через эти точки.



Результаты сведём в таблицу

Таблица.

| n | Контрольные точки | | | | | |
|-----|-------------------|----|---|--------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | -2 | 0 | -0,9 | 0,1 | 0 |
| 2 | 1 | -2 | 1 | 0,11 | -0,09 | 0,2 |
| 3 | 0 | -2 | 1 | -1,169 | 0,011 | -0,18 |

Из приведённой таблицы следует, что значения в четвёртой точке схемы – выходной сигнал $y(n)$ - совпадают с рассчитанными значениями. Следовательно, решение верное.

2.4. Метод уравнений в конечных разностях

В этом методе для анализа фильтров используются разностные уравнения. Опираясь на структуру фильтра, можно записать алгоритм вычисления выходного сигнала $y(n)$ через отсчёты входного сигнала $x(n)$ и выходного сигнала в предыдущие моменты времени – его разностное уравнение:

$$y(n) = \sum_{m=0}^H a_m x(n-m) + \sum_{k=1}^M b_k y(n-k).$$

Проиллюстрируем этот метод на предыдущем примере

Пример 3

Найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, изображённого на рисунке 18.4, если на его входе действует сигнал $x(n) = 1(n) - 1(n-3)$.

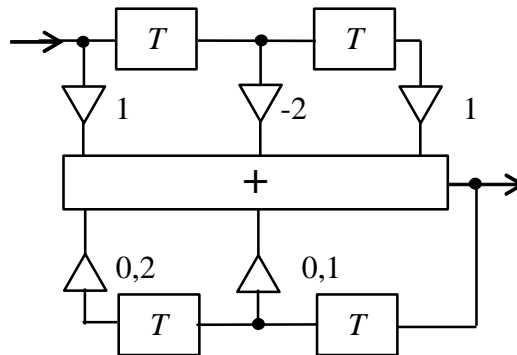


Рис. 18.4

Решение

На схеме фильтр второго порядка. Из приведённой схемы следует, что $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,2$, $H = M = 2$. Тогда разностное уравнение примет вид

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) + 0,1y(n-1) + 0,2y(n-2).$$

Используя это уравнение, найдём несколько первых значений выходного сигнала.

При этом учтём, что $y(n) = x(n) = 0$ при $n < 0$:

$$y(0) = x(0) - 2x(-1) + x(-2) + 0,1y(-1) + 0,2y(-2) = x(0) = 1,$$

$$y(1) = x(1) - 2x(0) + x(-1) + 0,1y(0) + 0,2y(-1) = 1 - 2 \cdot 1 + 0 + 0,1 \cdot 1 = -0,9,$$

$$y(2) = x(2) - 2x(1) + x(0) + 0,1y(1) + 0,2y(0) = 1 - 2 \cdot 1 + 1 + 0,1 \cdot (-0,9) + 0,2 \cdot 1 = 0,11,$$

$$y(3) = x(3) - 2x(2) + x(1) + 0,1y(2) + 0,2y(1) = 0 - 2 \cdot 1 + 1 + 0,1 \cdot 0,11 + 0,2 \cdot (-0,9) = -1,169.$$

Результаты решения примера обоими методами совпали.

Сравним изложенные выше методы анализа цифровых фильтров.

- 1) Метод дискретной свёртки удобнее использовать при анализе трансверсальных фильтров, у которых импульсная характеристика имеет конечное число отсчётов.
- 2) Метод Z – преобразования в равной мере можно использовать для анализа трансверсальных и рекурсивных фильтров. Причём оба метода приводят к формулам, по которым можно найти любой отсчёт выходного сигнала, не вычисляя предыдущие значения
- 3) Метод уравнений в конечных разностях также можно использовать в равной мере для анализа трансверсальных и рекурсивных фильтров. Основным недостатком этого

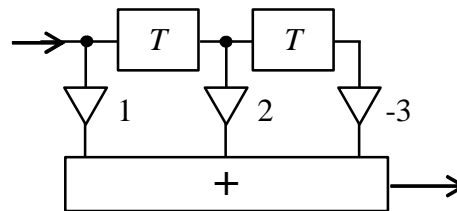
метода – рекуррентность. То есть n -ый отсчёт выходного сигнала можно вычислить только после вычисления всех предыдущих отсчётов.

Контрольные вопросы

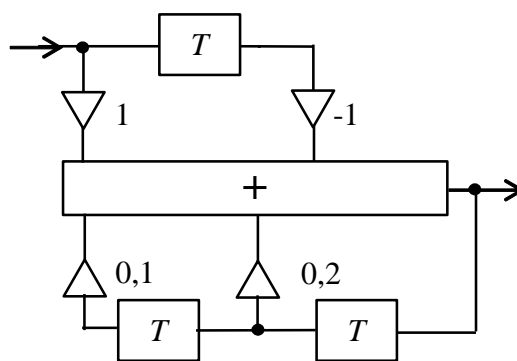
1. Дайте определение каузального цифрового фильтра.
2. Дайте определение некаузального цифрового фильтра. В чём принципиальное отличие некаузального фильтра от каузального?
3. В чём суть метода дискретной свёртки?
4. Дайте определение трансверсального фильтра.
5. Дайте определение рекурсивного цифрового фильтра

Типовые задачи к экзамену

1. Используя метод дискретной свёртки, найдите сигнал на выходе трансверсального фильтра, схема которого приведена на рисунке, если на его входе действует сигнал $x(n) = 1(n)$. Определите несколько первых отсчётов этого сигнала. Проверьте правильность расчётов по структурной схеме фильтра



2. Используя метод Z – преобразования, Найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, схема которого приведена на рисунке, если на его входе действует сигнал $x(n) = 1(n)$. Определите несколько первых отсчётов этого сигнала. Проверьте правильность расчётов по структурной схеме фильтра



3. Используя метод уравнений в конечных разностях, найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, схема которого приведена в предыдущем примере, если на его входе действует сигнал $x(n) = 1(n)$. Определите несколько первых отсчётов этого сигнала