<u>*Лекция №18.*</u>

<u>**Анализ цифровых фильтров**</u>

([1] стр. 367-374)

<u>1. Каузальные и некаузальные фильтры</u>

Кауза́льный (причинный) фильтр — это фильтр, сигнал на выходе которого зависит только от текущих и прошедших сигналов на его входе.

Импульсная характеристика каузального фильтра удовлетворяет условию $g(n)=0$ при $n < 0$, которое означает, что реакция фильтра не может предшествовать приложенному воздействию. Например, фильтр, описываемый разностным уравнением (см. пример 7 лекции 17) $y(n)=x(n)-2x(n-1)+x(n-2)+0{,}1y(n-1)+0{,}2y(n-2)$, удовлетворяет приведенному выше определению и, следовательно, является каузальным. Его импульсная характеристика $g(n)=\delta_T(n)-2\delta_T(n-1)+\delta_T(n-2)+0{,}1g(n-1)+0{,}2g(n-2)$ определена при $n \geq 0$.

Некаузальным называются фильтры, выходные сигналы которых зависят также от будущих входных сигналов. Например, сглаживающий фильтр, сигнал на выходе которого определяется скользящим усреднением по пяти соседним значениям, описывается разностным уравнением $y(n)=\frac{1}{5}\left(x(n-2)+x(n-1)+x(n)+x(n+1)+x(n+2)\right)$. Такой фильтр нельзя физически реализовать в режиме реального времени, так при вычислении очередного значения $y(n)$ необходимо знать будущие значения $x(n+1)$ и $x(n+2)$ входного воздействия. Импульсная характеристика фильтра определяется выражением $g(n)=\frac{1}{5}\left(\delta_T(n-2)+\delta_T(n-1)+\delta_T(n)+g(n+1)+g(n+2)\right)$. Она может быть определена при любых значениях *n*. Некаузальные фильтры можно использовать на практике в тех случаях, когда процедура фильтрации происходит не в реальном времени, а выполняется над хранящимися в памяти последовательностями конечной длины. То есть некаузальные фильтры – фильтры с памятью

<u>2. Анализ каузальных цифровых фильтров</u>

2.1. Постановка задачи.

Анализ каузальных цифровых фильтров, как и анализ любой радиотехнической цепи, сводится к определению сигнала на её выходе, когда известен входной сигнал и схема цепи. При решении этой задачи сначала определяют характеристики цепи. Затем, используя один из методов анализа, находят выходной сигнал. При этом мы выбираем тот метод, которым данную задачу решить проще. В рамках этой лекции мы рассмотрим три метода: дискретной свёртки, Z – преобразования и разностных уравнений.

2.2. Метод дискретной свёртки

Этот метод является аналогом метода интеграла свёртки, используемого при анализе аналоговых линейных цепей. При этом используется импульсная характеристика цепи $g(t)$. Тогда сигнал на выходе цепи $y(t)$ определяется с помощью интеграла свёртки

$$y(t)=\int_0^t x(v)g(t-v)dv .$$

Перейдём от непрерывного времени к дискретному: $t \to nt$, $v \to mv$. Тогда интегрирование заменится суммированием, и мы получим формулу дискретной свёртки

$$y(nT)=\sum_{m=0}^{n}x(mT)g(nT-mT).$$

Здесь $y(nT)$ - отсчёты выходного сигнала, $x(mT)$ - отсчёты входного сигнала, $g(nT-mT)$ - отсчёты импульсной характеристики.

При анализе можно в формуле дискретной свёртки опустить интервал дискретизации *T*. Тогда

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)g(n-m).$$

Метод дискретной свёртки удобнее использовать при анализе трансверсальных фильтров, у которых импульсная характеристика имеет конечное число отсчётов.

Пример 1

Найдите сигнал на выходе трансверсального фильтра, изображённого на рисунке 18.1, если на его входе действует сигнал $x(n)=1(n)-1(n-3)$.

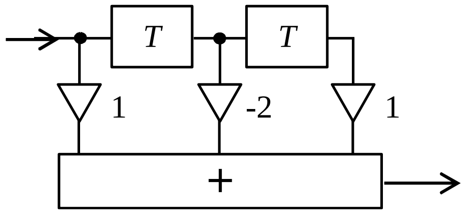


Рис.18.1

Решение

Импульсная характеристика фильтра (см. пример 5 лекции 17)

$g(n)=\delta_T(n)-2\delta_T(n-1)+\delta_T(n-2).$

Входной сигнал $x(n)=1(n)-1(n-3)$ приведён на рисунке 18.2

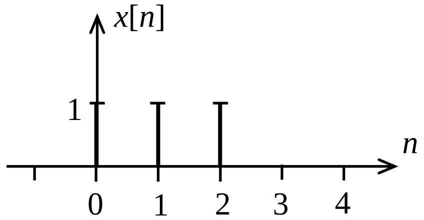


Рис.18.2

Тогда $y(n)=\sum_{m=0}^{2}\delta_T(n-m)-2\delta_T(n-m-1)+\delta_T(n-m-2).$

Найдём по этой формуле несколько первых отсчётов сигнала:

$$y(0)=\sum_{m=0}^{2}\delta_T(0-m)-2\delta_T(0-m-1)+\delta_T(0-m-2)=\underbrace{\delta_T(0-0)-2\delta_T(0-1)+\delta_T(0-2)}_{m=0}+$$

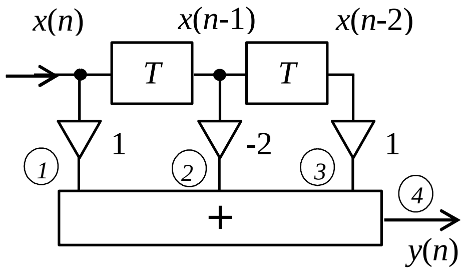
$$+\underbrace{\delta_T(0-1)-2\delta_T(0-2)+\delta_T(0-3)}_{m=1}+\underbrace{\delta_T(0-2)-2\delta_T(0-3)+\delta_T(0-4)}_{m=2}=$$

$$=\underbrace{\delta_T(0)-2\delta_T(-1)+\delta_T(-2)}_{m=0}+\underbrace{\delta_T(-1)-2\delta_T(-2)+\delta_T(-3)}_{m=1}+\underbrace{\delta_T(-2)-2\delta_T(-3)+\delta_T(-4)}_{m=2}=1$$

$$y(1)=\sum_{m=0}^{2}\delta_T(1-m)-2\delta_T(1-m-1)+\delta_T(1-m-2)=\underbrace{\delta_T(1-0)-2\delta_T(1-1)+\delta_T(1-2)}_{m=0}+$$
$$+\underbrace{\delta_T(1-1)-2\delta_T(1-2)+\delta_T(1-3)}_{m=1}+\underbrace{\delta_T(1-2)-2\delta_T(1-3)+\delta_T(1-4)}_{m=2}=$$
$$=\underbrace{\delta_T(1)-2\delta_T(0)+\delta_T(-1)}_{m=0}+\underbrace{\delta_T(0)-2\delta_T(-1)+\delta_T(-2)}_{m=1}+\underbrace{\delta_T(-1)-2\delta_T(-2)+\delta_T(-3)}_{m=2}=$$
$$=-2+1=-1$$

$$y(2)=\sum_{m=0}^{2}\delta_T(2-m)-2\delta_T(2-m-1)+\delta_T(21-m-2)=\underbrace{\delta_T(2-0)-2\delta_T(2-1)+\delta_T(2-2)}_{m=0}+$$
$$+\underbrace{\delta_T(2-1)-2\delta_T(2-2)+\delta_T(2-3)}_{m=1}+\underbrace{\delta_T(2-2)-2\delta_T(2-3)+\delta_T(2-4)}_{m=2}=$$
$$=\underbrace{\delta_T(2)-2\delta_T(1)+\delta_T(0)}_{m=0}+\underbrace{\delta_T(1)-2\delta_T(0)+\delta_T(-1)}_{m=1}+\underbrace{\delta_T(0)-2\delta_T(-1)+\delta_T(-2)}_{m=2}=$$
$$=1-2+1=0$$

Проверим правильность расчётов по структурной схеме фильтра. Для этого пронумеруем контрольные точки схемы и определим, как будет проходить сигнал через эти точки.



Результаты сведём в таблицу

Таблица.

n	Контрольные точки			
	1	*2*	*3*	*4*
0	1	0	0	1
1	1	-2	0	-1
2	1	-2	1	0
3	0	-2	1	-1
4	0	0	1	1
5	0	0	0	0

Из приведённой таблицы следует, что значения в четвёртой точке схемы – выходной сигнал $y(n)$ - совпадают с рассчитанными значениями. Следовательно, решение верное.

2.3. Метод Z – преобразования

Этот метод является аналогом операторного метода, используемого при анализе аналоговых линейных цепей. При этом используется системная функция цепи.

Алгоритм решения этим методом состоит из трёх действий:

1) Найдём Z – изображение входного сигнала с помощью прямого преобразования входного сигнала $\hat{X}(z) = Z(x(n))$
2) Найдём Z – изображение выходного сигнала, умножив Z – изображение входного сигнала на системную функцию цифрового фильтра $\hat{Y}(z) = \hat{X}(z) \cdot \hat{K}(z)$
3) Найдём выходной сигнал с помощью обратного преобразования Z – изображения выходного сигнала $y(n) = Z^{-1}\left(\hat{Y}(z)\right)$

Пример 2

Найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, изображённого на рисунке 18.3, если на его входе действует сигнал $x(n) = 1(n) - 1(n-3)$.

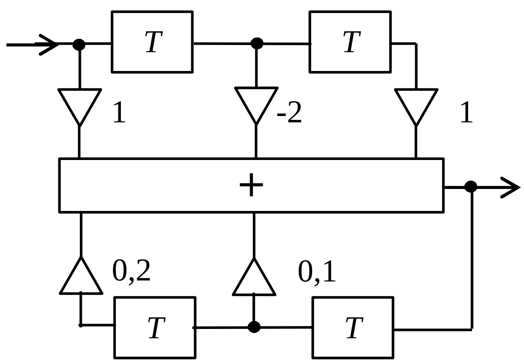


Рис. 18.3

Решение

Системная функция этого фильтра $\hat{K}(z) = \dfrac{(z-1)^2}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}$ (см. пример 8 лекции 17).

1) Найдём Z – изображение входного сигнала, для этого воспользуемся Z – изображением дискретной функции Хевисайда $1(n)$ $Z(1(n)) = \dfrac{z}{z-1}$ и свойством запаздывания. Тогда
$$\hat{X}(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} \cdot z^{-3} = \frac{z - z^{-2}}{z-1} = \frac{z^3 - 1}{z^2(z-1)} = \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{z^2(z-1)} = \frac{z^2+z+1}{z^2}$$
2) Найдём Z – изображение выходного сигнала
$$\hat{Y}(z) = \hat{X}(z) \cdot \hat{K}(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2} \cdot \frac{(z-1)^2}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)} = \frac{(z^2+z+1)(z-1)^2}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}4)}$$
3) Выходной сигнал найдём с помощью обратного Z – преобразования. Для этого воспользуемся вычетами.

Условие $\lim\limits_{z\to 0}\hat{Y}(z)=0$ не выполняется, поскольку $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(z^2+z+1)(z-1)^2}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}4)}=-\infty$. Поэтому

преобразуем $\hat{Y}(z)$

$$\hat{Y}(z)=\frac{(z^2+z+1)(z-1)^2}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}4)}=\frac{z^4+z^3+z^2-2z^3-2z^2-2z+z^2+z+1}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}4)}=\frac{z^4-z^3-z+1}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}4)}=$$

$$=\frac{z^4-z^3}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}4)}-\frac{z-1}{z^2(z-0{,}5)(z+0{,}4)}=\frac{z(z-1)}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}-\frac{z(z-1)}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}\cdot z^{-3}$$

Обозначим $\hat{Y}_1(z)=\dfrac{z(z-1)}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}$. Тогда $\hat{Y}(z)=\hat{Y}_1(z)-\hat{Y}_1(z)\cdot z^{-3}$

Условие $\lim\limits_{z\to 0}\hat{Y}_1(z)=0$ выполняется. Найдём $y_1(n)=Z^{-1}\left(\hat{Y}_1(z)\right)$ с помощью вычетов.

Функция $\hat{Y}_1(z)=\dfrac{z(z-1)}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}$ имеет два полюса первой кратности $z_{\Pi 1}=-0{,}4$,

$z_{\Pi 2}=0{,}5$. Тогда $y_1(n)=res_1+res_2$

$$res_1=\lim_{z\to 0{,}5}\left((z-0{,}5)\cdot\frac{z(z-1)}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to 0{,}5}\frac{z-1}{(z+0{,}4)}z^n=-\frac{5}{9}0{,}5^n\cdot 1(n)$$

$$res_2=\lim_{z\to -0{,}4}\left((z+0{,}4)\cdot\frac{z(z-1)}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to 0{,}5}\frac{z-1}{(z-0{,}5)}z^n=\frac{14}{9}(-0{,}4)^n\cdot 1(n)$$

$$y_1(n)=res_1+res_2=\left(-\frac{5}{9}0{,}5^n+\frac{14}{9}(-0{,}4)^n\right)\cdot 1(n).$$

Учитывая свойство запаздывания, имеем $y(n)=y_1(n)-y_1(n-3)$. Тогда

$$y(n)=\left(-\frac{5}{9}0{,}5^n+\frac{14}{9}(-0{,}4)^n\right)\cdot 1(n)-\left(-\frac{5}{9}0{,}5^{n-3}+\frac{14}{9}(-0{,}4)^{n-3}\right)\cdot 1(n-3).$$

Найдём по этой формуле несколько первых отсчётов сигнала:

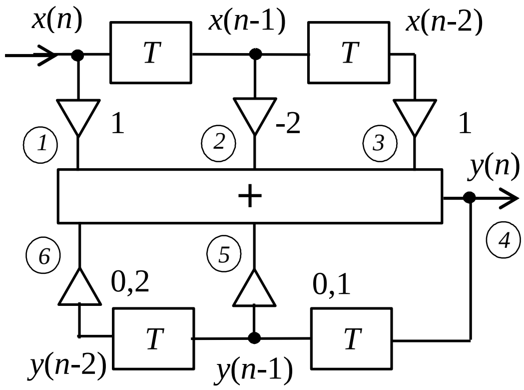
$$y(0)=\left(-\frac{5}{9}0{,}5^0+\frac{14}{9}(-0{,}4)^0\right)\cdot 1(0)-\left(-\frac{5}{9}0{,}5^{-3}+\frac{14}{9}(-0{,}4)^{-3}\right)\cdot 1(-3)=1,$$

$$y(1)=\left(-\frac{5}{9}0{,}5+\frac{14}{9}(-0{,}4)\right)\cdot 1(1)-\left(-\frac{5}{9}0{,}5^{-2}+\frac{14}{9}(-0{,}4)^{-2}\right)\cdot 1(-2)=-0{,}9,$$

$$y(2)=\left(-\frac{5}{9}0{,}5^2+\frac{14}{9}(-0{,}4)^2\right)\cdot 1(2)-\left(-\frac{5}{9}0{,}5^{-1}+\frac{14}{9}(-0{,}4)^{-1}\right)\cdot 1(-1)=0{,}11,$$

$$y(3)=\left(-\frac{5}{9}0{,}5^3+\frac{14}{9}(-0{,}4)^3\right)\cdot 1(3)-\left(-\frac{5}{9}0{,}5^0+\frac{14}{9}(-0{,}4)^0\right)\cdot 1(0)=-1{,}169.$$

Проверим правильность расчётов по структурной схеме фильтра. Для этого пронумеруем контрольные точки схемы и определим, как будет проходить сигнал через эти точки.



Результаты сведём в таблицу

Таблица.

n	Контрольные точки					
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	1	0	0	1	0	0
1	1	-2	0	-0,9	0,1	0
2	1	-2	1	0,11	-0,09	0,2
3	0	-2	1	-1,169	0,011	-0,18

Из приведённой таблицы следует, что значения в четвёртой точке схемы – выходной сигнал $y(n)$ - совпадают с рассчитанными значениями. Следовательно, решение верное.

2.4. Метод уравнений в конечных разностях

В этом методе для анализа фильтров используются разностные уравнения. Опираясь на структуру фильтра, можно записать алгоритм вычисления выходного сигнала $y(n)$ через отсчёты входного сигнала $x(n)$ и выходного сигнала в предыдущие моменты времени – его разностное уравнение:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{H} a_m x(n-m)+\sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k).$$

Проиллюстрируем этот метод на предыдущем примере

<u>Пример 3</u>

Найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, изображённого на рисунке 18.4, если на его входе действует сигнал $x(n)=1(n)-1(n-3)$.

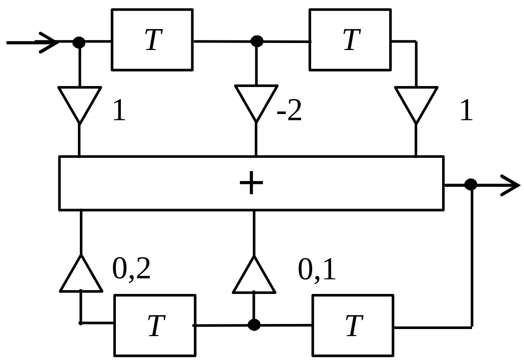


Рис. 18.4

<u>Решение</u>

На схеме фильтр второго порядка. Из приведённой схемы следует, что $a_0=1$, $a_1=-2$, $a_2=1$, $b_1=0{,}1$, $b_2=0{,}2$, $H=M=2$. Тогда разностное уравнение примет вид

$$y(n)=x(n)-2x(n-1)+x(n-2)+0{,}1y(n-1)+0{,}2y(n-2).$$

Используя это уравнение, найдём несколько первых значений выходного сигнала. При этом учтём, что $y(n)=x(n)=0$ при $n<0$:

$$y(0)=x(0)-2x(-1)+x(-2)+0{,}1y(-1)+0{,}2y(-2)=x(0)=1,$$

$$y(1)=x(1)-2x(0)+x(-1)+0{,}1y(0)+0{,}2y(-1)=1-2\cdot1+0+0{,}1\cdot1=-0{,}9,$$

$$y(2)=x(2)-2x(1)+x(0)+0{,}1y(1)+0{,}2y(0)=1-2\cdot1+1+0{,}1\cdot(-0{,}9)+0{,}2\cdot1=0{,}11,$$

$$y(3)=x(3)-2x(2)+x(1)+0{,}1y(2)+0{,}2y(1)=0-2\cdot1+1+0{,}1\cdot0{,}11+0{,}2\cdot(-0{,}9)=-1{,}169.$$

Результаты решения примера обоими методами совпали.

Сравним изложенные выше методы анализа цифровых фильтров.

1) Метод дискретной свёртки удобнее использовать при анализе трансверсальных фильтров, у которых импульсная характеристика имеет конечное число отсчётов.
2) Метод Z – преобразования в равной мере можно использовать для анализа трансверсальных и рекурсивных фильтров. Причём оба метода приводят к формулам, по которым можно найти любой отсчёт выходного сигнала, не вычисляя предыдущие значения
3) Метод уравнений в конечных разностях также можно использовать в равной мере для анализа трансверсальных и рекурсивных фильтров. Основной недостаток этого

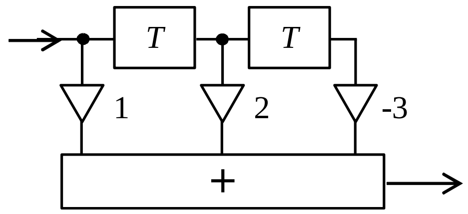
метода – рекуррентность. То есть *n*-ый отсчёт выходного сигнала можно вычислить только после вычисления всех предыдущих отсчётов.

Контрольные вопросы

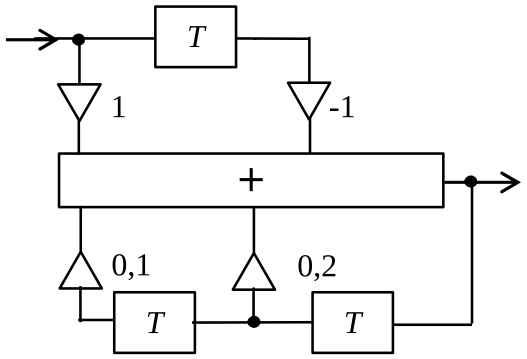
1. Дайте определение каузального цифрового фильтра.
2. Дайте определение некаузального цифрового фильтра. В чём принципиальное отличие некаузального фильтра от каузального?
3. В чём суть метода дискретной свёртки?
4. Дайте определение трансверсального фильтра.
5. Дайте определение рекурсивного цифрового фильтра

Типовые задачи к экзамену

1. Используя метод дискретной свёртки, найдите сигнал на выходе трансверсального фильтра, схема которого приведена на рисунке, если на его входе действует сигнал $x(n)=1(n)$. Определите несколько первых отсчётов этого сигнала. Проверьте правильность расчётов по структурной схеме фильтра



2. Используя метод Z – преобразования, Найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, схема которого приведена на рисунке, если на его входе действует сигнал $x(n)=1(n)$. Определите несколько первых отсчётов этого сигнала. Проверьте правильность расчётов по структурной схеме фильтра



3. Используя метод уравнений в конечных разностях, найдите сигнал на выходе рекурсивного фильтра, схема которого приведена в предыдущем примере, если на его входе действует сигнал $x(n)=1(n)$. Определите несколько первых отсчётов этого сигнала