Лекция №17.

Обратное Z - преобразование. Цифровые фильтры

([1] стр. 361-367)

1. Обратное Z-преобразование.

Обратное Z- преобразование позволяет по изображению $\hat{S}(z)$ найти отсчёты дискретного сигнала $s(n)$. Мы будем его использовать в сочетании с прямым Z-преобразованием при анализе дискретных фильтров. Формула обратного Z-преобразования

$$s(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \hat{S}(z) z^{n-1} dz .$$

Интегрирование ведется по окружности радиуса «С» с центром в начале координат. Радиус «С» выбирается таким образом, чтобы все полюса подынтегральной функции $\hat{L}(z) = \hat{S}(z) z^{n-1}$ лежали внутри окружности.

Существует несколько способов вычисления обратного Z- преобразования. Рассмотрим наиболее часто используемые.

1.1. С помощью вычетов.

Этот способ можно использовать, если выполняется условие $\lim_{z \to 0} \hat{S}(z) = 0$. Тогда

$s(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \hat{S}(z) z^{n-1} dz = \sum_i res_i$, где

$res_i = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_{\Pi i}} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_{\Pi i})^k \hat{L}(z) \right)$, k – кратность полюса, $z_{\Pi i}$ - полюс функции $\hat{S}(z)$.

В частном случае при k=1: $res_i = \lim_{z \to z_{\Pi i}} \left((z - z_{\Pi i}) \hat{L}(z) \right)$

при k=2: $res_i = \lim_{z \to z_{\Pi i}} \frac{d}{dz} \left((z - z_{\Pi i})^2 \hat{L}(z) \right)$

Пример 1

Пусть $\hat{S}(z) = \frac{z}{z-a}$. Найдите $s(n)$.

Решение

Условие $\lim_{z \to 0} \hat{S}(z) = 0$ выполняется. Поэтому воспользуемся вычетами.

Функция $\hat{S}(z) = \frac{z}{z-a}$ имеет один полюс первой кратности $z_{\Pi 1} = a$. Тогда

$s(n) = res_1 = \lim_{z \to a} \left((z-a) \cdot \frac{z}{z-a} \cdot z^{n-1} \right) = \lim_{z \to a} z^n = a^n \cdot 1(n)$.

Множитель $1(n)$ означает, что дискретный сигнал $s(n)$ задан на множестве неотрицательных значений целого аргумента n.

Таким образом, если $\hat{S}(z) = \frac{z}{z-a}$, то $s(n) = a^n \cdot 1(n)$.

А что делать, если условие $\lim_{z \to 0} \hat{S}(z) = 0$ не выполняется?

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 2

Пусть $\hat{S}(z) = \dfrac{z+0{,}5}{z-a}$. Найдите $s(n)$.

Решение

Условие $\lim\limits_{z\to 0} \hat{S}(z) = 0$ не выполняется, поскольку $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z+0{,}5}{z-a} = -\dfrac{1}{2a}$.

Представим $\hat{S}(z)$ в виде $\hat{S}(z) = \dfrac{z}{z-a} + \dfrac{0{,}5}{z-a} = \dfrac{z}{z-a} + 0{,}5 \cdot \dfrac{z}{z-a} \cdot z^{-1}$.

Теперь воспользуемся свойствами Z-преобразования (линейности и запаздывания) и решением примера 1. Тогда

$s(n) = a^n \cdot 1(n) + 0{,}5a^{n-1} \cdot 1(n-1)$.

1.2. Разложение на простые дроби с последующим использованием вычетов или таблиц Z-преобразования.

Вспомним, что разложить на простые дроби можно только правильную дробь.

Правильной дробью называется дробь, степень многочлена числителя у которой меньше степени многочлена знаменателя. Например, $\dfrac{z+0{,}5}{z^2-1}$ - правильная дробь, а $\dfrac{z^2+0{,}5}{z^2-1}$ - неправильная дробь. Если дробь неправильная, то её надо представить в виде суммы целой части и правильной дроби. Так $\dfrac{z^2+0{,}5}{z^2-1} = \dfrac{z^2-1+1+0{,}5}{z^2-1} = \dfrac{z^2-1+1{,}5}{z^2-1} = 1 + \dfrac{1{,}5}{z^2-1}$.

В свою очередь элементарными называются дроби вида:

а) $\dfrac{A}{z-a}$;

б) $\dfrac{A}{(z-a)^m}$;

в) $\dfrac{Cz+D}{z^2+pz+q}, \quad p^2-4q<0$;

г) $\dfrac{Cz+D}{(z^2+pz+q)^m}, \quad p^2-4q<0, \quad m = 2,3,4...$

Неравенство $p^2-4q<0$ показывает, что в дробях «в» и «г» нет действительных полюсов.

Разложение на элементарные дроби реализуется по следующей схеме:

1) Разложим знаменатель правильной дроби на множители. Они могут быть двух видов: $(z-a)^m$ и $(z^2+pz+q)^m, \quad p^2-4q<0$

Каждому множителю знаменателя вида $(z-a)$ соответствует элементарная дробь $\dfrac{A}{z-a}$.

Каждому множителю знаменателя вида $(z-a)^m$ соответствует сумма элементарных дробей $\dfrac{A_1}{z-a} + \dfrac{A_2}{(z-a)^2} + \dots \dfrac{A_m}{(z-a)^m}$.

Каждому множителю знаменателя вида $(z^2+pz+q), \quad p^2-4q<0$ соответствует элементарная дробь $\dfrac{Cz+D}{z^2+pz+q}$.

Каждому множителю знаменателя вида $(z^2+pz+q)^m, \quad p^2-4q<0$ соответствует сумма элементарных дробей $\dfrac{C_1z+D_1}{z^2+pz+q} + \dfrac{C_2z+D_2}{(z^2+pz+q)^2} + \dots + \dfrac{C_mz+D_m}{(z^2+pz+q)^m}$.

2) Представим разлагаемую дробь в виде суммы элементарных дробей. При этом учтём, на какие множители мы разложили её знаменатель.

3) Определим неизвестные коэффициенты элементарных дробей. Для этого приведём правую часть полученного равенства к общему знаменателю и приравняем выражения при одинаковых степенях переменной z в числителях левой и правой частей равенства. Из полученной системы уравнений найдём неизвестные коэффициенты.

Пример 3

Пусть $\hat{S}(z)=\dfrac{z+0{,}4}{z^2-1}$. Найдите $s(n)$.

Решение

Воспользуемся способом разложения на элементарные дроби.

$\dfrac{z+0{,}4}{z^2-1}$ - правильная дробь, поскольку степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя (1<2).

1) Разложим знаменатель на множители: $z^2-1=(z-1)(z+1)$.

2) Представим заданную дробь в виде: $\dfrac{z+0{,}4}{z^2-1}=\dfrac{A_1}{z-1}+\dfrac{A_2}{z+1}$.

3) Найдём коэффициенты A_1 и A_2.

Для этого сначала приведём к общему знаменателю правую часть полученного равенства и приведём в числителе подобные члены:

$$\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z+1}=\frac{A_1(z+1)+A_2(z-1)}{(z-1)(z+1)}=\frac{A_1z+A_1+A_2z-A_2}{(z-1)(z+1)}=\frac{(A_1+A_2)z+A_1-A_2}{(z-1)(z+1)}.$$

Тогда $\dfrac{z+0{,}4}{z^2-1}=\dfrac{(A_1+A_2)z+A_1-A_2}{(z-1)(z+1)}$. У этих дробей одинаковые знаменатели, для их равенства достаточно, чтобы были равны числители, то есть $z+0{,}4=(A_1+A_2)z+A_1-A_2$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z

- при первой степени z^1: $A_1+A_2=1$

- при нулевой степени z^0: $A_1-A_2=0{,}4$.

Теперь составим систему уравнений и, решив её, найдём искомые коэффициенты

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\A_1-A_2=0{,}4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_1=1-A_2\\1-A_2-A_2=0{,}4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_1=1-A_2\\2A_2=0{,}6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_1=0{,}7\\A_2=0{,}3\end{cases}.$$

Тогда $\hat{S}(z)=\dfrac{z+0{,}4}{z^2-1}=\dfrac{0{,}7}{z-1}+\dfrac{0{,}3}{z+1}$.

Представим $\hat{S}(z)$ в виде $\hat{S}(z)=\dfrac{0{,}7z}{z-1}z^{-1}+\dfrac{0{,}3z}{z+1}z^{-1}$.

Теперь воспользуемся свойствами Z-преобразования (линейности и запаздывания) и решением примера 1, из которого следует: если $\hat{S}(z)=\dfrac{z}{z-a}$, то $s(n)=a^n\cdot 1(n)$.

Тогда $s(n)=0{,}7\cdot 1^{n-1}\cdot 1(n-1)+0{,}3(-1)^{n-1}\cdot 1(n-1)=\left(0{,}7+0{,}3(-1)^{n-1}\right)\cdot 1(n-1)$.

1.3. Делением многочлена на многочлен.

В результате деления многочлена в числителе на многочлен в знаменателе мы получаем разложение дроби по отрицательным степеням z. Коэффициенты членов полученного ряда и будут отсчётами дискретного сигнала. Достоинство способа – отсутствие ограничений на функцию $\hat{S}(z)$, которые есть у первых двух способов. Недостаток – в результате громоздких преобразований мы получаем только несколько первых значений сигнала $s(n)$, а не общую формулу. Его удобно использовать для проверки решения первых двух способов.

<u>Пример 4</u>

Пусть, как и в примере 3, $\hat{S}(z) = \dfrac{z+0{,}4}{z^2-1}$. Найдите несколько первых значений сигнала $s(n)$.

<u>Решение</u>

Воспользуемся способом деления многочлена на многочлен. Для этого поделим $z+0{,}4$ на z^2-1

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} z+0{,}4 \\ z-z^{-1} \end{array} & \ z^2-1 \\ \cline{2-2}
\overline{\quad -\begin{array}{l} 0{,}4+z^{-1} \\ 0{,}4-0{,}4z^{-2} \end{array}} & \ z^{-1}+0{,}4z^{-2}+z^{-3} \\
\overline{\qquad -\begin{array}{l} z^{-1}+0{,}4z^{-2} \\ z^{-1}-z^{-3} \end{array}} & \\
\overline{\qquad\qquad 0{,}4z^{-2}+z^{-3}} &
\end{array}
$$

В результате деления мы получили неполное частное $z^{-1}+0{,}4z^{-2}+z^{-3}$, которое представляет первые несколько членов разложения функции $\hat{S}(z)$ по отрицательным степеням переменной z, то есть $\hat{S}(z) = \dfrac{z+0{,}4}{z^2-1} = z^{-1}+0{,}4z^{-2}+z^{-3}+\ldots$ Из полученного разложения можно определить первые несколько значений сигнала $s(n)$. Для этого вспомним, что $\hat{S}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s(n)z^{-n}$. Тогда $s(0)=0$, $s(1)=1$, $s(2)=0{,}4$, $s(3)=1$.

Вернёмся к формуле, которую мы получили при решении примера 3:
$s(n) = \left(0{,}7+0{,}3(-1)^{n-1}\right)\cdot 1(n-1)$. Используя эту формулу, последовательно получаем:
$s(0) = \left(0{,}7+0{,}3(-1)^{-1}\right)\cdot 1(-1) = (0{,}7-0{,}3)\cdot 0 = 0$,
$s(1) = \left(0{,}7+0{,}3(-1)^{0}\right)\cdot 1(0) = (0{,}7+0{,}3)\cdot 1 = 1$,
$s(2) = \left(0{,}7+0{,}3(-1)^{1}\right)\cdot 1(1) = (0{,}7-0{,}3)\cdot 1 = 0{,}4$,
$s(3) = \left(0{,}7+0{,}3(-1)^{2}\right)\cdot 1(2) = (0{,}7+0{,}3)\cdot 1 = 1$.
Таким образом, решение примера 4 подтвердило правильность решения примера 3.

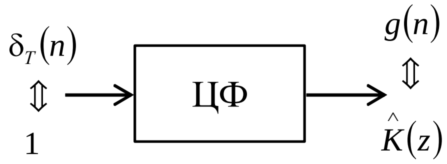
<u>2.Цифровые фильтры</u>

Цифровые фильтры на сегодняшний день применяются практически везде, где требуется обработка сигналов, в частности в спектральном анализе, обработке изображений, обработке видео, обработке речи и звука и многих других приложениях.

Для анализа цифровых фильтров нам потребуются их характеристики и в первую очередь импульсная характеристика и системная функция.

Импульсной характеристикой цифрового фильтра называется отклик на воздействие в виде единичного отсчёта (импульса Кронекера).

Системной функцией цифрового фильтра называется отношение Z-изображения выходного сигнала к Z- изображению входного сигнала, заданного в общем виде.



Импульсная характеристика и системная функция связаны между собой прямым и обратным Z-преобразованием. То есть: $\hat{K}(z) = Z\big(g(n)\big)$ и $g(n) = Z^{-1}\left(\hat{K}(z)\right)$. Здесь $Z\big(f(n)\big)$ - условное обозначение прямого, а $Z^{-1}\left(\hat{F}(z)\right)$ обратного Z- преобразования.

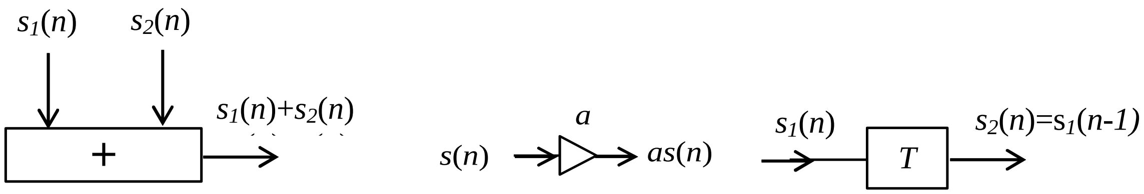


Рис.17.1

На рисунке 17.1 приведены элементы, из которых состоит цифровой фильтр: сумматор, умножитель на число и линия задержки на один такт.

2.1. Трансверсальные и рекурсивные фильтры

Трансверсальным называется фильтр, который производит взвешенное суммирование предшествующих отсчетов входного сигнала. Сигнал на выходе такого фильтра зависит только от значений входного сигнала в текущий и предшествующие моменты времени. Трансверсальные фильтры называются ещё КИХ- фильтрами (с конечной импульсной характеристикой). На рисунке 17.2 представлена схема трансверсального фильтра, где H – порядок фильтра.

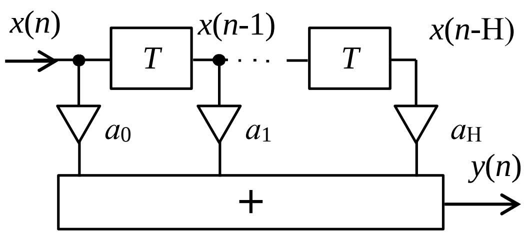


Рис.17.2

Опираясь на структуру фильтра, можно записать алгоритм вычисления выходного сигнала $y(n)$ через отсчёты входного сигнала $x(n)$ – его разностное уравнение:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{H} a_m x(n-m)$$

Заметим, что входной сигнал $x(n)$ задан при $n \geq 0$, а при $n < 0$ $x(n) = 0$
Тогда из формулы следует, что
$y(0) = a_0 x(0)$,
$y(1) = a_0 x(1) + a_1 x(0)$,
$y(2) = a_0 x(2) + a_1 x(1) + a_2 x(0)$,
…
$y(H) = a_0 x(H) + a_1 x(H-1) + ... + a_H x(0)$,
$y(H+1) = a_0 x(H+1) + a_1 x(H) + ... + a_H x(1)$
…
Из приведённых формул следует, что в формировании значения выходного сигнала участвует не больше H отсчётов входного сигнала.

Найдём импульсную характеристику трансверсального фильтра. Для этого, опираясь на её определение, достаточно подставить в формулу $y(n) = \sum_{m=0}^{H} a_m x(n-m)$ в качестве входного сигнала единичный отсчёт: $x(n) = \delta_T(n)$. Тогда импульсная характеристика $g(n) = \sum_{m=0}^{H} a_m \delta_T(n-m)$.

Пример 5

Найдите импульсную характеристику трансверсального фильтра, схема которого приведена на рисунке.

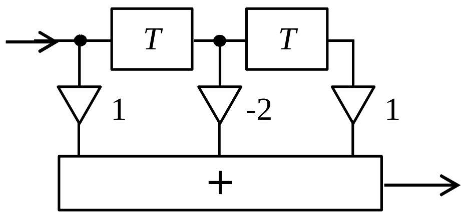


Рис.17.2

Решение

На схеме фильтр второго порядка. Из приведённой схемы следует, что $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $H = 2$. Тогда

$$g(n) = \delta_T(n) - 2\delta_T(n-1) + \delta_T(n-2).$$

На рисунке 17.3 показана импульсная характеристика фильтра

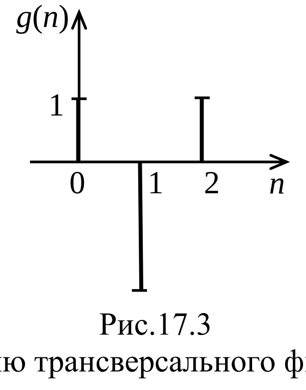


Рис.17.3

Найдём системную функцию трансверсального фильтра. Для этого достаточно взять прямое Z – преобразование от импульсной характеристики. Тогда $\hat{K}(z) = \sum_{m=0}^{H} a_m z^{-m}$.

Преобразуем полученную функцию, представив её в виде отношения двух многочленов,
$\hat{K}(z) = \sum_{m=0}^{H} a_m z^{-m} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_H z^{-H} = \dfrac{a_0 z^H + a_1 z^{H-1} + a_2 z^{H-2} + ... + a_H}{z^H}$.

Полученная функция имеет H нулей и полюс $z_П = 0$ кратности H. Из неё следует, что все трансверсальные фильтры устойчивы, поскольку полюса системной функции расположены на Z - плоскости внутри окружности единичного радиуса

Пример 6

Найдите системную функцию трансверсального фильтра (см. пример 5).

Решение

Импульсная характеристика этого фильтра $g(n) = \delta_T(n) - 2\delta_T(n-1) + \delta_T(n-2)$, Тогда прямое Z – преобразование от импульсной характеристики $\hat{K}(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 1}{z^2} = \dfrac{(z-1)^2}{z^2}$

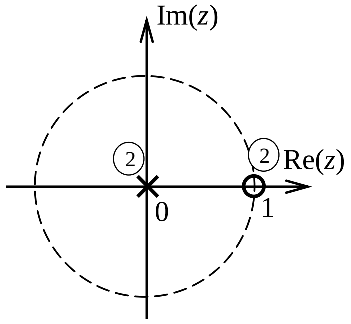


Рис.17.4

На рисунке 17.4 приведена диаграмма нулей (кружочком) и полюсов (косым крестом) этого фильтра. У него полюс $z_П = 0$ и нуль $z_0 = 1$ второй кратности.

Рекурсивным называется фильтр с обратными связями. Сигнал на выходе такого фильтра зависит не только от значений входного сигнала в текущий и предшествующие моменты времени, но и от значений выходного сигнала в предшествующие моменты времени. Рекурсивные фильтры называются ещё БИХ-фильтрами (с бесконечной импульсной характеристикой). На рисунке 17.5 представлена схема рекурсивного фильтра, где M – порядок фильтра.

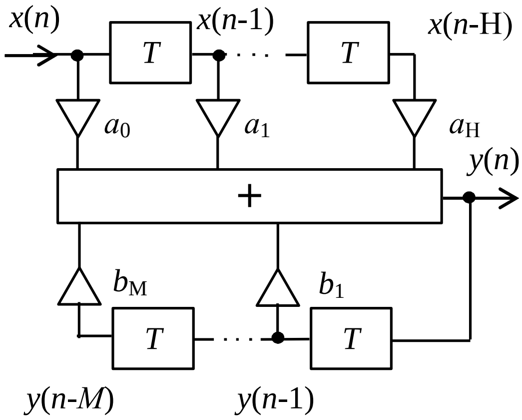


Рис.17.5

Опираясь на структуру фильтра, можно записать алгоритм вычисления выходного сигнала $y(n)$ через отсчёты входного сигнала $x(n)$ и выходного сигнала в предыдущие моменты времени – его разностное уравнение:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{H} a_m x(n-m) + \sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k)$$

При анализе БИХ фильтров можно для простоты считать, что $H = M$. На рисунке 17.6 приведена каноническая схема рекурсивного фильтра. Её отличительная особенность –

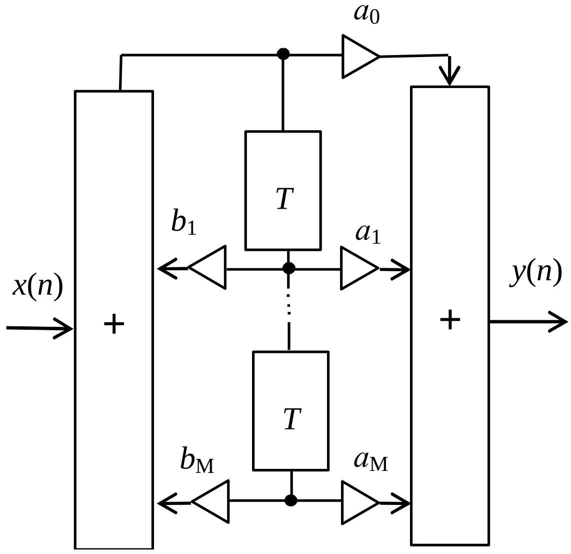


Рис. 17.6

двукратное уменьшение числа линий задержки. В отдельных случаях, уровень шумов у фильтра, реализованного в прямой форме, лучше, чем в канонической.

Найдём импульсную характеристику рекурсивного фильтра. Для этого, опираясь на её определение, достаточно подставить в формулу $y(n) = \sum_{m=0}^{H} a_m x(n-m) + \sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k)$ в качестве входного сигнала единичный отсчёт: $x(n) = \delta_T(n)$. Тогда импульсная характеристика $g(n) = \sum_{m=0}^{H} a_m \delta_T(n-m) + \sum_{k=1}^{M} b_k g(n-k)$.

<u>Пример 7</u>

Найдите импульсную характеристику рекурсивного фильтра, схема которого приведена на рисунке 17.7.

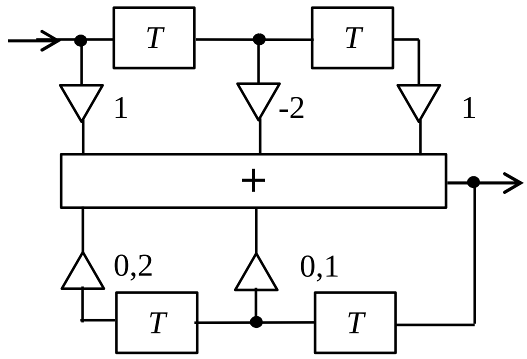


Рис. 17.7

<u>Решение</u>

На схеме фильтр второго порядка. Из приведённой схемы следует, что $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0{,}1$, $b_2 = 0{,}2$, $H = M = 2$. Тогда

$g(n) = \delta_T(n) - 2\delta_T(n-1) + \delta_T(n-2) + 0{,}1g(n-1) + 0{,}2g(n-2)$.

Рассчитаем по этой формуле несколько первых отсчётов импульсной характеристики:

$g(0) = \delta_T(0) - 2\delta_T(-1) + \delta_T(-2) + 0{,}1g(-1) + 0{,}2g(-2) = 1 - 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0{,}1\cdot 0 + 0{,}2\cdot 0 = 1$,

$g(1) = \delta_T(1) - 2\delta_T(0) + \delta_T(-1) + 0{,}1g(0) + 0{,}2g(-1) = 0 - 2\cdot 1 + 0 + 0{,}1\cdot 1 + 0{,}2\cdot 0 = -1{,}9$

$$g(2)=\delta_T(2)-2\delta_T(1)+\delta_T(0)+0{,}1g(1)+0{,}2g(0)=0-2\cdot 0+1+0{,}1\cdot(-1{,}9)+0{,}2\cdot 1=1{,}01$$
$$g(3)=\delta_T(3)-2\delta_T(2)+\delta_T(1)+0{,}1g(2)+0{,}2g(1)=0-2\cdot 0+0+0{,}1\cdot(1{,}01)+0{,}2\cdot(-1{,}9)=-0{,}279$$

При расчётах мы учли, что импульсная характеристика определена на множестве неотрицательных значений переменной *n* и что $\delta_T(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$.

Из расчётов следует, что импульсная характеристика фильтра затухает с ростом аргумента. Следовательно, этот фильтр устойчив.

Найдём системную функцию рекурсивного фильтра. Для этого достаточно взять прямое Z – преобразование от импульсной характеристики. Тогда

$$\hat{K}(z)=\sum_{m=0}^{H}a_m z^{-m}+\sum_{k=1}^{M}b_k\,\hat{K}(z)z^{-k}\Leftrightarrow \hat{K}(z)\left(1-\sum_{k=1}^{M}b_k z^{-k}\right)=\sum_{m=0}^{H}a_m z^{-m}\Leftrightarrow \hat{K}(z)=\frac{\sum_{m=0}^{H}a_m z^{-m}}{\left(1-\sum_{k=1}^{M}b_k z^{-k}\right)}.$$

Предположим для простоты, что *H*=*M*. Преобразуем полученную функцию, представив её в виде отношения двух многочленов. Для этого умножим числитель и знаменатель правой части полученной формулы на z^M. Тогда

$$\hat{K}(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}a_m z^{M-m}}{\left(Z^M-\sum_{k=1}^{M}b_k z^{M-k}\right)}=\frac{a_0 z^M+a_1 z^{M-1}+\ldots+a_M}{z^M-b_1 z^{M-1}-\ldots-b_M}.$$

<u>Пример 8</u>

Найдём системную функцию рекурсивного фильтра (см. пример 7). Изобразим диаграмму нулей и полюсов этого фильтра.

<u>Решение</u>

В примере 7 задан рекурсивный фильтр второго порядка. Из приведённой схемы следует, что $a_0=1$, $a_1=-2$, $a_2=1$, $b_1=0{,}1$, $b_2=0{,}2$, $H=M=2$. Воспользуемся формулой $\hat{K}(z)=\dfrac{a_0 z^M+a_1 z^{M-1}+\ldots+a_M}{z^M-b_1 z^{M-1}-\ldots-b_M}$, подставив в неё заданные значения. Тогда

$$\hat{K}(z)=\frac{z^2-2z+1}{z^2-0{,}1z-0{,}2}=\frac{(z-1)^2}{(z-0{,}5)(z+0{,}4)}$$

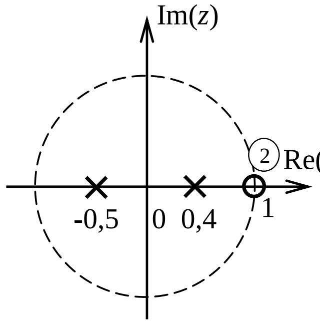


Рис.17.8

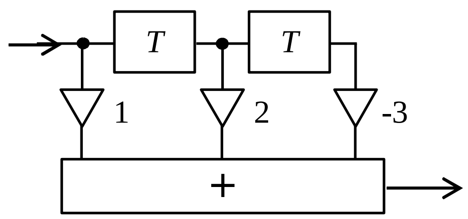
На рисунке 17.8 приведена диаграмма нулей (кружочком) и полюсов (косым крестом) этого фильтра. У него 2 полюса $z_{П1}=0{,}4$, $z_{П2}=-0{,}5$ и нуль $z_0=1$ второй кратности. Из диаграммы следует, что фильтр устойчив, так как его плюса расположены внутри круга единичного радиуса. Этот результат подтверждает вывод, сделанный при решении примера 7.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение импульсной характеристики цифрового фильтра.
2. Дайте определение системной функции цифрового фильтра.
3. Дайте определение трансверсального фильтра.
4. Дайте определение рекурсивного цифрового фильтра

Типовые задачи к экзамену

1. Пусть $\hat{S}(z) = \dfrac{z+0{,}3}{z-0{,}6}$. Найдите $s(n)$ с помощью вычетов. Результат проверьте делением многочлена на многочлен.
2. Пусть $\hat{S}(z) = \dfrac{z+1}{z^2-4}$. Найдите $s(n)$ с помощью разложения на простые дроби. Результат проверьте делением многочлена на многочлен.
3. Найдите импульсную характеристику и системную функцию трансверсального фильтра, схема которого приведена на рисунке. Постройте диаграмму нулей и полюсов и определите устойчивость предложенной схемы.



4. Найдите импульсную характеристику и системную функцию рекурсивного фильтра, схема которого приведена на рисунке. Постройте диаграмму нулей и полюсов и определите устойчивость предложенной схемы.