Лекция №16.

([1] стр. 358-360)

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Прямое Z – преобразование

1. Определение прямого и обратного дискретного преобразования Фурье.

Рассмотрим алгоритм вычисления преобразования Фурье от дискретного сигнала. Для этого выберем идеальный дискретный сигнал с конечным числом отсчетов (ограниченной длительности). Пусть число отсчетов равно N, интервал дискретизации равен T. Тогда длительность сигнала $T_c = (N-1)T$. Этот идеальный дискретный сигнал можно описать формулой $S_{ТИ}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} S(nT)\cdot\delta(t-nT)$. Обозначим n-ый отсчет сигнала $S(nT) = S_n$

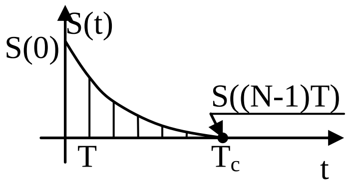


Рис.16.1

На рисунке 16.1 изображены отсчеты идеального дискретного сигнала. Найдем спектральную плотность этого сигнала. Для этого вычислим прямое преобразование Фурье $\dot{S}_{ТИ}(\omega)$ от сигнала $S_{ТИ}(t)$.

$$\dot{S}_{ТИ}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ТИ}(t)\cdot e^{-j\omega t}\delta(t-nT)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1} S_n\cdot e^{-j\omega t}\delta(t-nT)dt = \sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty} S_n\cdot e^{-j\omega t}\delta(t-nT)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} S_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-nT)dt = \sum_{n=0}^{N-1} S_n\cdot e^{-j\omega nT}$$

$$\dot{S}_{ТИ}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n\cdot e^{-j\omega nT}; \quad где \quad T = \frac{2\pi}{\omega_д} \; - интервал \;\; дискретизации$$

Продискретизируем полученную спектральную плотность с интервалом дискретизации ω_1. Величина интервала дискретизации спектра ω_1 выбирается таким образом, чтобы в одном периоде спектра умещалось ровно N отсчетов. То есть столько же, сколько было отсчетов у сигнала. Это делается для упрощения алгоритма вычисления прямого и обратного преобразований Фурье, реализуемых с помощью специальной программы на ПК. Тогда $\omega_1 = \frac{\omega_д}{N}$; $\omega_1 = \frac{2\pi}{NT}$. Обозначим k-ый отсчет спектра буквой $\dot{F}_k$. Тогда

$$\dot{F}_k = \dot{S}_T(k\cdot\omega_1) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n\cdot e^{-jk\omega_1 nT} = \sum_{n=0}^{N-1} S_n\cdot e^{-j\frac{kn2\pi}{N}}, \quad т.к. \quad \omega_1 = \frac{\omega_д}{N} = \frac{2\pi}{NT}$$

Равенство $\dot{F}_k = \dot{S}_T(k\omega_1) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n \cdot e^{-j\frac{kn2\pi}{N}}$ называется прямым дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Существует и обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ), с помощью которого по отсчетам спектра определяются отсчеты дискретного сигнала. ОДПФ определяется равенством $S_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \dot{F}_k \cdot e^{j\frac{kn2\pi}{N}}$.

$$\dot{F}_k = \dot{S}_T(k\omega_1) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n \cdot e^{-j\frac{kn2\pi}{N}} \quad (\mathit{ДПФ})$$

$$S_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \dot{F}_k \cdot e^{j\frac{kn2\pi}{N}} \quad (\mathit{ОДПФ - обратное})$$

Определим, какой сигнал стоит за спектром, представленным отсчетами $\dot{F}_k$.

<u>2. Сигнал с дискретным периодическим спектром</u>

Рис.16.2

На рисунке 16.2 условно изображен исходный аналоговый сигнал и его спектр. После дискретизации аналогового сигнала его спектр станет периодическим с периодом, равным частоте дискретизации. На рисунке 16.3 условно изображен дискретный сигнал и его спектр.

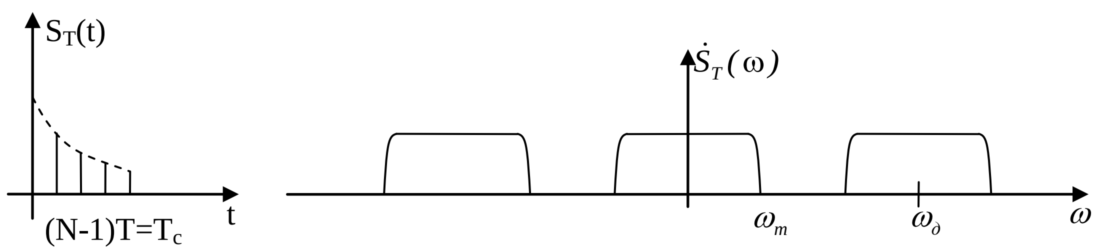


Рис.16.3

Мы знаем, что если сигнал непериодический, то его спектр сплошной. Если сигнал периодический, то его спектр дискретный. Используя свойство преобразования Фурье обратимости частоты и времени, можно утверждать, что если спектр периодический, то сигнал дискретный. Тогда, если спектр периодический и дискретный, то сигнал дискретный и периодический.

На рисунке 16. 4 изображены дискретный и периодический сигнал и соответствующий ему периодический и дискретный спектр.

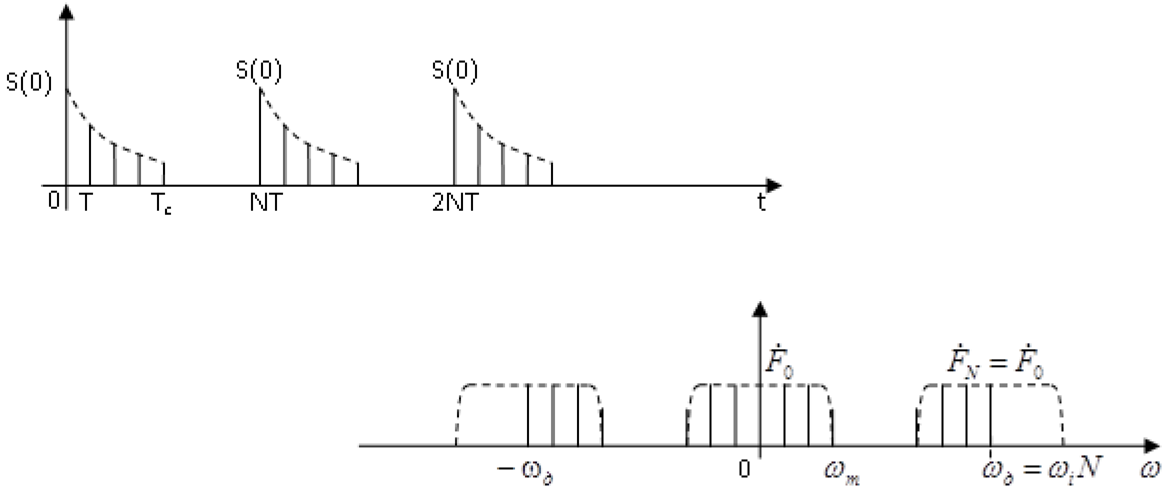


Рис.16.4

3. Применение ДПФ и ОДПФ.

1. Для вычисления энергетического спектра дискретного сигнала:

$$S(n) \xrightarrow{ДПФ} \dot{F}_k \to \dot{F}_k \cdot \dot{F}_k^{\,*} = W_k \,.$$

Здесь W_k - отсчеты энергетического спектра сигнала, более устойчивого к помехам, чем амплитудный спектр.

2. Для вычисления отсчетов корреляционной функции сигнала:

$$\dot{S}_n \xrightarrow{ДПФ} \dot{F}_k \to \dot{F}_k \cdot \dot{F}_k^{*} \xrightarrow{ОДПФ} B_n \,.$$

Здесь B_n - отсчеты корреляционной функции сигнала.

3. Для вычисления спектров сигналов, отраженных от разных объектов. Эти спектры более устойчивы к искажению, чем сами сигналы и используются для распознавания объектов.

4. Дискретное преобразование Лапласа

Пусть с помощью решетчатой функции задан идеальный дискретный сигнал $s_{TИ}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)$, где T –интервал дискретизации, $s(nT)$ или для краткости записи $s(n)$ - отсчёты дискретного сигнала равные значениям аналогового сигнала в моменты времени, кратные *T*.

Тогда, вычисляя преобразование Лапласа от этого сигнала, получим

$L_{TИ}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) e^{-pnT}$. Дискретное преобразование обладает теми же свойствами, что и непрерывное. Вычисление обратного преобразования Лапласа затруднено.

Поэтому для анализа и синтеза цифровых цепей и анализа дискретных сигналов. используют другое преобразование. Оно получается из дискретного преобразования Лапласа заменой переменных $z = e^{pT}$ и называется z-преобразованием

<u>Z – преобразование дискретных сигналов</u>

<u>1. Прямое z-преобразование</u>

Используя замену переменных $z = e^{pT}$, мы перешли от дискретного преобразования Лапласа к так называемому <u>Z – преобразованию (преобразованию Лорана)</u>

$$\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) z^{-n}.$$

Выразим переменную p из равенства $z = e^{pT}$. Тогда $p = \frac{1}{T}\ln z$. Эти формулы нам понадобятся, чтобы установить связь между ***z*** и ***p*** – плоскостями. Заметим, что переменная ***z*** безразмерная, а переменная ***p*** имеет размерность с$^{-1}$.

В дальнейшем будем обозначать прямое Z –преобразование знаком Z(…), то есть

$$Z\big(s(n)\big) = \hat{S}(z).$$

<u>2. Связь между ***z*** и ***p*** – плоскостями</u>

Вспомним, что $p = \sigma + j\omega$, где σ - затухание, ω - циклическая частота

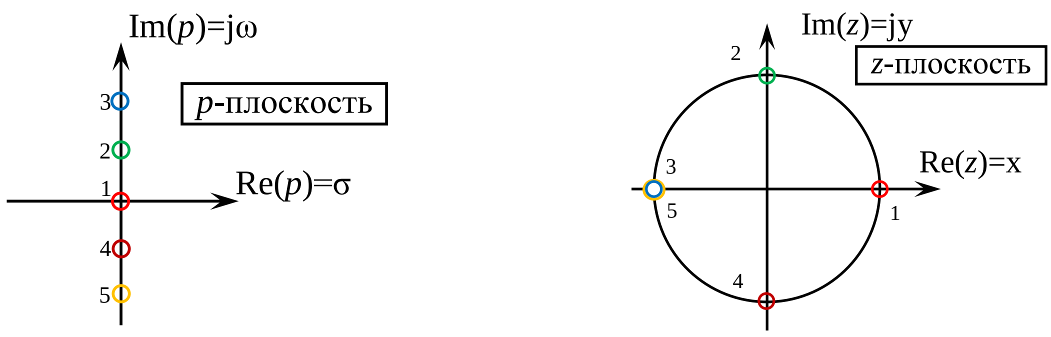


Рис.16.5

На рисунке 16.5 изображено отображение различных точек плоскости ***p*** на плоскость ***z***:
- если $\sigma = 0$, то $p = j\omega$ и $z = e^{j\omega T}$ - точки, лежащие на окружности единичного радиуса;
- если $p = 0$, то $z = e^{0} = 1$ - точка 1 отображена красным цветом;
- если $p = j\frac{\omega_д}{4} = j\frac{\pi}{2T}$, то $z = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ - точка 2 отображена зелёным цветом;
- если $p = j\frac{\omega_д}{2} = j\frac{\pi}{T}$, то $z = e^{j\pi} = -1$ - точка 3 отображена синим цветом;
- если $p = -j\frac{\omega_д}{4} = -j\frac{\pi}{2T}$, то $z = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$ - точка 4 отображена фиолетовым цветом;
- если $p = -j\frac{\omega_д}{2} = -j\frac{\pi}{T}$, то $z = e^{-j\pi} = -1$ - точка 5 отображена жёлтым цветом.

Таким образом, отрезок $\left[-j\frac{\omega_\partial}{2}; j\frac{\omega_\partial}{2}\right]$ оси $j\omega$ плоскости ***p*** отображается в окружность единичного радиуса плоскости ***z***, причём точки $p = j\frac{\omega_\partial}{2}$ и $p = -j\frac{\omega_\partial}{2}$ ***p*** - плоскости отображаются в одну точку $z = -1$ ***z*** – плоскости.

Тогда вся ось $j\omega$ плоскости ***p*** отображается в бесчисленное множество окружностей единичного радиуса ***z*** – плоскости, наложенных друг на друга.

Если $\sigma = -\sigma_1 < 0$, то $p = -\sigma_1 + j\omega$ и $z = e^{-\sigma_1 + j\omega T} = e^{-\sigma_1} \cdot e^{j\omega T}$ - точки, лежащие на окружности радиуса меньше единицы. Тогда левая полуплоскость ***p*** – плоскости отображается во внутреннюю часть круга единичного радиуса ***z*** – плоскости.

Вспомним, что для устойчивости линейной аналоговой цепи необходимо чтобы полюса её системной функции лежали в левой полуплоскости ***p*** –плоскости. Тогда полюса системной функции устойчивой линейной цифровой цепи, используемой для обработки дискретных сигналов должны лежать внутри круга единичного радиуса ***z*** – плоскости.

Вспомним, как через расстояния от нулей и полюсов системной функции аналоговой линейной цепи определяются её частотные характеристики. Тогда из отображения оси $j\omega$ на плоскость ***p*** следует, что частотные характеристики линейных цепей, обрабатывающих дискретные сигналы, должны быть периодическими с периодом равным частоте дискретизации ω_∂.

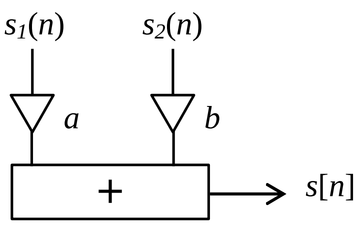
<u>3. Основные свойства Z – преобразования</u>

3.1.Свойство линейности

Если $s(n) = a \cdot s_1(n) + b \cdot s_2(n)$, то $\hat{S}(z) = a \cdot \hat{S}_1(z) + b \cdot \hat{S}_2(z)$,

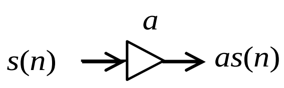
где $\hat{S}_1(z) = Z(s_1(n))$, $\hat{S}_2(z) = Z(s_2(n))$ - Z преобразования сигналов $s_1(n)$ и $s_2(n)$.

На словах это свойство можно сформулировать так: прямое Z преобразование алгебраической суммы двух сигналов равно алгебраической сумме Z преобразований этих сигналов



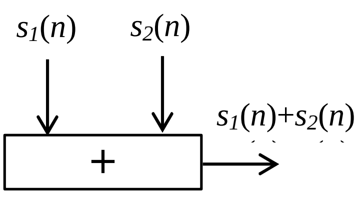
На рисунке слева изображён фрагмент схемы цифрового фильтра, отображающий алгебраическое суммирование двух сигналов.

На схеме



умножитель на число *a*

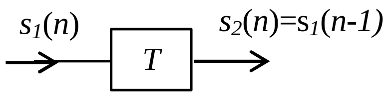
сумматор



3.2.Свойство запаздывания

Если $s_1(n) = s_2(n-m)$, то $\hat{S}_1(z) = \hat{S}_2(z) z^{-m}$,

где $\hat{S}_1(z) = Z(s_1(n))$, $\hat{S}_2(z) = Z(s_2(n))$ - Z преобразования сигналов $s_1(n)$ и $s_2(n)$.
На словах это свойство можно сформулировать так: если сигнал задерживается на m интервалов дискретизации, то его прямое Z преобразование умножается на z^{-m} .



На рисунке слева изображён фрагмент схемы цифрового фильтра, отображающий задержку сигнала на один такт (интервал дискретизации), а в таблице первые 7 отсчётов сигналов $s_1(n)$ и $s_2(n)$.

Таблица

n	0	1	2	3	4	5	6
$s_1(n)$	$s_1(0)$	$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$	$s_1(5)$	$s_1(6)$
$s_2(n)$	0	$s_1(0)$	$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$	$s_1(5)$

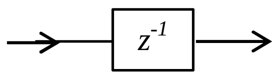
Используя формулу прямого Z преобразования $\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) e^{-nz}$, найдём Z изображения этих сигналов:

$$\hat{S}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_1(n) z^{-n} = s_1(0) + s_1(1) \cdot z^{-1} + s_1(2) \cdot z^{-2} + \ldots$$

$$\hat{S}_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_2(n) z^{-n} = 0 \cdot z^0 + s_1(0) \cdot z^{-1} + s_1(1) \cdot z^{-2} + s_1(2) \cdot z^{-3} + \ldots =$$

$$= z^{-1}\left(s_1(0) + s_1(1) \cdot z^{-1} + s_1(2) \cdot z^{-2} + \ldots\right) = z^{-1} \cdot \hat{S}_1(z)$$

Полученный результат подтверждает справедливость свойства запаздывания.
Учитывая это свойство, часто элемент запаздывания изображают на схемах цифровых фильтров в виде



4. Z – преобразование элементарных дискретных сигналов

а) Единичный отсчёт (дискретный единичный импульс, импульс Кронекера):

$$s(n) = \delta_T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Тогда $\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) z^{-n} = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + \ldots = 1$

б) Функция включения (дискретная функция Хевисайда): $s(n) = 1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$.

$$\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) z^{-n} = 1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \ldots .$$

Для записи полученного ряда в виде дробно рациональной функции воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$, где b_1 - первый член прогрессии, q - её знаменатель.

В нашем примере $b_1 = 1$, $q = z^{-1}$. Тогда $\hat{S}(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$

<u>5. Способы вычисления прямого Z – преобразования</u>

Рассмотрим на примерах различные способы вычисления прямого Z – преобразования

5.1. Подстановкой отсчётов $s(n)$ дискретного сигнала в формулу прямого Z – преобразования

<u>Пример 1</u>

Пусть $s(0)=1$, $s(1)=2$, $s(2)=0$, $s(3)=-1$, $s(n)=0$ при $n \geq 4$. Найдите $\hat{S}(z)$

<u>Решение</u>

Используя формулу прямого Z – преобразования, имеем

$$\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) z^{-n} = 1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} - 1 \cdot z^{-3} = 1 + \frac{2}{z} - \frac{1}{z^3} = \frac{z^3 + 2z^2 - 1}{z^3}.$$

Заметим, что для анализа цифровых фильтров удобнее Z изображение сигнала записывать в виде дробно-рациональной функции.

5.2. Сигнал задан в виде уравнения в конечных разностях

<u>Пример 2</u>

Пусть $s(n) = a_0 \cdot \delta_T(n) + b_1 \cdot s(n-1) + b_2 \cdot s(n-2) + \ldots b_k \cdot s(n-k)$. Найдите $\hat{S}(z)$

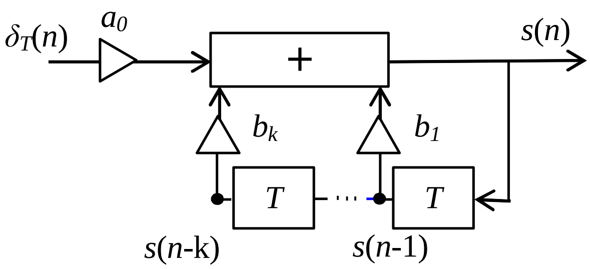
<u>Решение</u>

Используя свойства Z преобразования и учитывая, что $Z(\delta_T(n)) = 1$, получим

$$\hat{S}(z) = a_0 \cdot 1 + b_1 \cdot \hat{S}(z) \cdot z^{-1} + b_2 \cdot \hat{S}(z) \cdot z^{-2} + \ldots b_k \cdot \hat{S}(z) \cdot z^{-k}.$$

Выразим из полученного уравнения $\hat{S}(z)$:

$$\hat{S}(z)\left(1 - b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots b_k \cdot z^{-k}\right) = a_0 \Leftrightarrow \hat{S}(z) = \frac{a_0}{1 - \sum_{m=1}^{k} b_m z^{-n}} = \frac{a_0 \cdot z^k}{z^k - \sum_{m=1}^{k} b_m z^{k-n}}.$$



На рисунке слева приведена структурная схема устройства, генерирующего этот сигнал.

5.3. Сигнал задан в виде функции

Пусть сигнал задан в виде дискретной функции $s(n) = f(n) \cdot 1(n)$, где $f(x)$ одна из элементарных функций. Тогда Z преобразование сигнала

$\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = f(0) \cdot z^0 + f(1) \cdot z^{-1} + f(2) \cdot z^{-2} + \ldots$.

Для преобразования полученного выражения мы опять будем использовать сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, определив из полученного выражения первый член прогрессии b_1 и знаменатель q.

<u>Пример 3</u>

Пусть $s(n) = e^{-\alpha nT} \cdot 1(n)$. Найдите $\hat{S}(z)$.

<u>Решение</u>

$s(n) = e^{-\alpha nT} \cdot 1(n)$. Тогда $\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} z^{-n} = 1 \cdot z^0 + e^{-\alpha T} \cdot z^{-1} + e^{-2\alpha T} \cdot z^{-2} + \ldots$

Из полученного выражения имеем $b_1 = 1$, $q = e^{-\alpha T} \cdot z^{-1}$Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\hat{S}(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}.$$

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Объясните, как вычисляется прямое и обратное дискретное преобразование Фурье
2. Какой спектр у дискретного периодического сигнала?
3. Для чего используется ДПФ и ОДПФ?
4. Сформулируйте основные свойства Z – преобразования
5. Перечислите основные способы вычисления прямого Z – преобразования
6. Сформулируйте критерий устойчивости линейной цифровой цепи.

<u>Типовые задачи к экзамену</u>

1. Пусть $s(n) = 2 \cdot \delta_T(n) + 0{,}2 \cdot s(n-1) - 0{,}1 \cdot s(n-2)$. Найдите $\hat{S}(z)$
2. Найдите Z – изображение сигнала $s(n) = 0{,}5(1(n) - 1(n-3))$
3. Найдите Z – изображение сигнала $s(n) = 0{,}5^{-nT} \cdot 1(n) - 2 \cdot 1(n-1)$