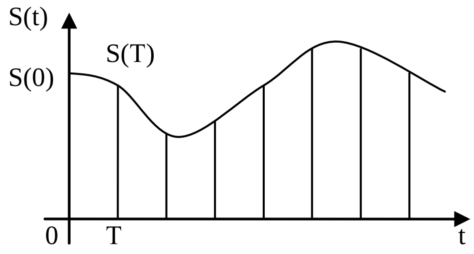
Лекция №14.

Дискретные сигналы и их обработка. Теорема Котельникова

([1] стр. 59-65; 351-353)

Дискретным называется сигнал, заданный в дискретные моменты времени.



T – интервал дискретизации

Структурная схема канала передачи дискретных сообщений

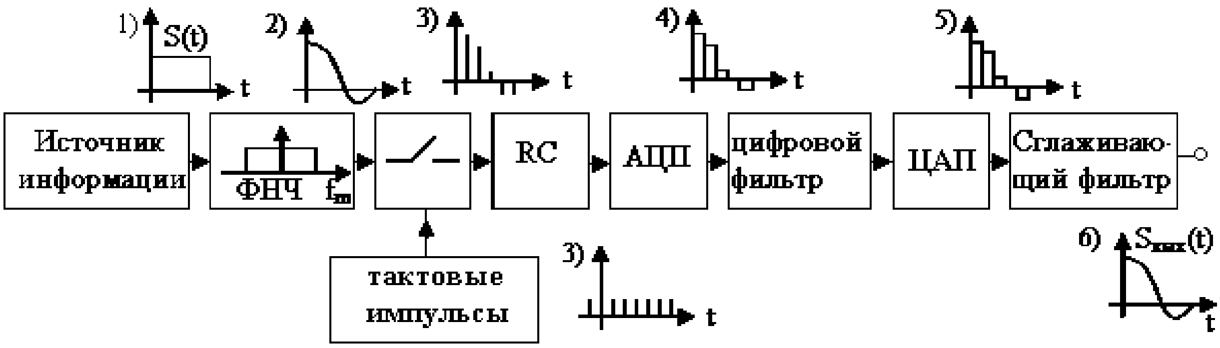


РИС.14.1

На рисунке 14.1 приведена структурная схема канала передачи цифровой информации

1) Источник информации формирует сигнал, передающий информацию.

2) ФНЧ служит для ограничения спектра дискретизуемого сигнала.

3) Дискретизатор (электронный ключ) преобразовывает аналоговый сигнал в дискретный.

4) RC цепочка увеличивает длительность импульсов, то есть запоминает значение дискретного импульса на длительное время. Этот блок не обязателен.

4) АЦП (аналого-цифровой преобразователь) – служит для преобразования сигнала в цифровой двоичный код.

5) ЦАП (цифро-аналоговый преобразователь) – служит для преобразования цифрового сигнала в аналоговый.

6) Сглаживающий фильтр подавляет ВЧ составляющие. Это ФНЧ. После него на выходе канала из квантованного сигнала (5) получается аналоговый сигнал.

Достоинства и недостатки цифровой обработки информации.

Недостатки:

- в схеме обработки информации появляются дополнительные устройства: АЦП и ЦАП и увеличивается стоимость.
- частичная потеря информации, заключенной в аналоговом сигнале

Достоинства:

– исправление искаженной информации
– более высокая помехоустойчивость за счет специальных методов кодирования информации;
– удобство хранения информации;
– возможность сжатия информации;
– возможность передачи информации по одному и тому же каналу от разных источников;
– дискретная обработка имеет более упрощенное математическое описание для дискретных сигналов.

Теорема Котельникова.

Если сигнал ограничен по спектру частотой F_{max}, то его можно восстановить по отсчетам, отстоящим друг от друга на $T \le \dfrac{1}{2F_{\max}}$

Пример 1.

Используя теорему Котельникова, продискретизировать сигнал $S(t) = E\cos\Omega t$.

Найдем спектр заданного сигнала. Он изображен на рисунке 14.2.

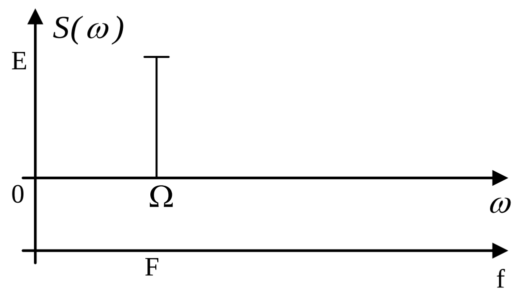


Рис.14.2. Спектр заданного аналогового сигнала.

Из рисунка 14.2 видно, что максимальная частота спектра $F_{max} = F$. Тогда интервал дискретизации T в соответствии с теоремой Котельникова определяется из условия $T \le \dfrac{1}{2F_{max}} = \dfrac{1}{2F} = \dfrac{T_c}{2}$, где T_c – период заданного сигнала. На рисунке 14.3. изображены заданный аналоговый сигнал и отсчеты дискретного сигнала: S(0), S(T), S(2T),..

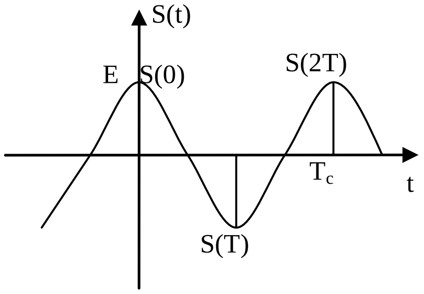


Рис.14.3

Восстановление аналогового сигнала по отсчетам дискретного сигнала. Ряд Котельникова.

Для восстановления сигнала $S(t)$ по его отсчетам $S(nT)$ используется ряд Котельникова. Тогда $S(t)=\sum_n S(nT)\cdot\varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t)$ – функция Котельникова,

$$\varphi_n(t)=\frac{\sin(2\pi\cdot F_{max}(t-nT))}{2\pi\cdot F_{max}(t-nT)}=\operatorname{sinc}(2\pi\cdot F_{max}(t-nT))$$

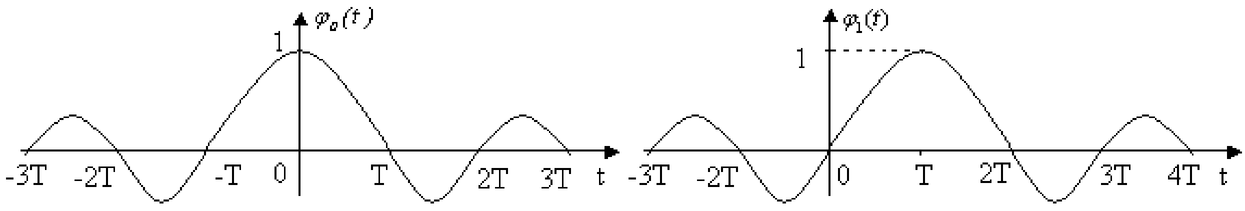


Рис. 14.4 Функции Котельникова $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$.

Пример 2:

По заданной выборке восстановить аналоговый сигнал, используя ряд Котельникова.

$S(0)=1$

$S(T)=-2$

$S(2T)=1$

$S(nT)=0, \left[\begin{array}{l} n\ge 3 \\ n<0 \end{array}\right.$

$S(t)=?$

В заданном примере только три отсчета сигнала не равны нулю. Поэтому в ряде Котельникова останется три слагаемых и аналоговый сигнал запишется в виде

$$S(t)=1\cdot\varphi_0(t)-2\cdot\varphi_1(t)+1\cdot\varphi_2(t).$$

То есть искомый сигнал представляет собой алгебраическую сумму трех функций Котельникова $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ с весами 1, -2 и 1 соответственно.

Приближенный график этого сигнала изображен красным цветом на рисунке 14.5.

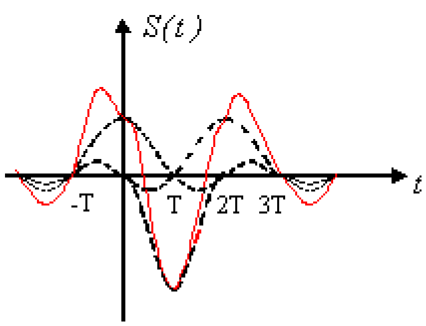


Рис. 14.5 Восстановленный сигнал $S(t)$.

Дискретизация сигналов конечной длительности.

Все сигналы конечной длительности имеют бесконечно широкий спектр, поэтому перед дискретизацией сигнала надо ограничить его спектр, пропустив через ФНЧ. Однако при этом часть информации о сигнале мы потеряем. Поэтому, если мы ограничим спектр исходного аналогового сигнала, то получим другой сигнал. Если мы затем продискретизируем полученный сигнал, то по его отсчетам не сможем восстановить исходный сигнал. Отличия восстановленного сигнала от исходного будут тем сильнее, чем больше высокочастотных составляющих будет потеряно на выходе ФНЧ. Проследим это на примере восстановления прямоугольного импульса по части его спектра

Пример 3:

Восстановление прямоугольного импульса по части его спектра.

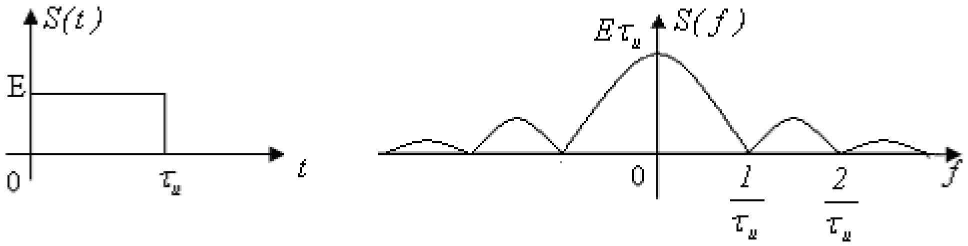


Рис.14.6. Прямоугольный импульс и модуль его спектра.

Ограничим спектр прямоугольного импульса сначала частотой. Тогда интервал дискретизации *T* полученного сигнала $S_1(t)$ с максимальной частотой $F_{max} = \frac{1}{\tau_и}$ в соответствии с теоремой Котельникова будет равен $T = \frac{1}{2F_{max}} = \frac{\tau_и}{2}$, то есть на промежутке, равном длительности импульса поместится не больше трех отсчетов (см. рис. 14.7.а).

Затем ограничим спектр прямоугольного импульса частотой $F_{max} = \frac{2}{\tau_и}$. Тогда интервал дискретизации *T* полученного сигнала $S_1(t)$ с максимальной частотой $F_{max} = \frac{2}{\tau_и}$ в соответствии с теоремой Котельникова будет равен $T = \frac{1}{2F_{max}} = \frac{\tau_и}{4}$, то есть на промежутке, равном длительности импульса поместится не больше пяти отсчетов (см. рис. 14.7.б).

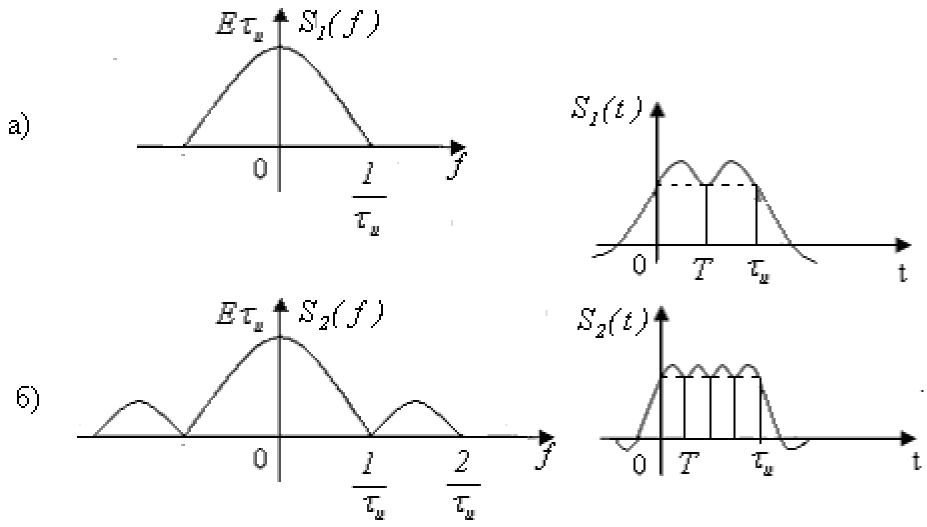


Рис. 14.7 Восстановление прямоугольного импульса при ограничении его спектра разными частотами

Чем меньше интервал дискретизации, тем точнее мы можем восстановить сигнал конечной длительности, используя ряд Котельникова. Однако, с уменьшением интервала дискретизации T увеличивается количество отсчетов, представляющих исходный сигнал. Таким образом, для обработки выборки требуется высокое быстродействие и большой объем памяти процессора.

$f_д = \frac{1}{T}$ – частота дискретизации, следовательно, ищут компромисс между точностью воспроизведения сигнала и объемом необходимой информации.

Обычно при ограничении спектра сигнала частоту F_{max} выбирают из условия

$$\int_{-F_{max}}^{F_{max}} \left| \dot{S}(2\pi f) \right|^2 df = k \cdot Э_s$$, где $0{,}9 \le k < 1$, $Э_s$ - энергия сигнала.

Это условие означает, что максимальная частота для фильтра, ограничивающего спектр исходного сигнала, выбирается так, чтобы отбрасывались гармоники, составляющие не более 10% энергии этого сигнала.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дискретному сигналу.
2. Объясните назначение каждого блока, входящего в структурную схему канала передачи дискретных сообщений.
3. Перечислите достоинства и недостатки цифровой обработки информации.
4. Сформулируйте теорему Котельникова. Приведите примеры сигналов с ограниченным по частоте спектром.
5. Изобразите в одной системе координат функции Котельникова $\varphi_0(t)$ и $\varphi_3(t)$
6. Найдите спектры сигналов $s(t) = \varphi_0(t)$ и $s(t) = \varphi_3(t)$. Поясните, почему с помощью ряда Котельникова нельзя восстановить сигналы, спектр которых содержит частоты $f > F_{max}$.
7. В чем особенность дискретизации сигналов конечной длительности?
8. Из каких соображений выбирается интервал дискретизации сигналов конечной длительности?

<u>Типовые задачи к экзамену</u>

1. Отсчеты дискретного сигнала $S(0)=1$; $S(1)=-2$; $S(2)=0$; $S(3)= -1$; $S(n)=0, n>3$. Запишите аналитическое выражение аналогового сигнала, восстановленного с помощью ряда Котельникова, и изобразите его график.
2. Прямоугольный импульс длительностью $\tau_и$ и амплитудой E пропущен через идеальный фильтр низких частот с равномерной АЧХ в полосе частот $f \in [-F_1;F_1]$, $F_1=1/\tau_и$. Определите значения первых семи отсчетов дискретного сигнала, если сигнал начинается при $t=0$.
3. Найдите аналитическое выражение аналогового сигнала, восстановленного с помощью ряда Котельникова по этим отсчетам, и изобразите его график.