Лекция №9. ([1] стр. 220-225,229-230)

Анализ нелинейных цепей.

I. Постановка задачи анализа

Нелинейными называются цепи, в которых один или несколько параметров зависят от входного сигнала. Нелинейные цепи описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

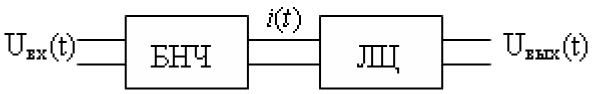
В чем сложность анализа?

1. Не применим принцип суперпозиции.

2. На выходе нелинейных цепей появляются гармоники, отсутствующие на входе.

Последовательность анализа нелинейных цепей.

1. Представить нелинейную цепь в виде каскадного соединения безынерционного нелинейного четырехполюсника (БНЧ) и линейной цепи.



БНЧ – четырехполюсник, сигнал на выходе которого зависит только от значения входного сигнала в данный момент времени и не зависит от предыдущих значений входного сигнала.

Пример безынерционного четырёхполюсника: транзистор, делитель напряжения на резисторах;

Пример инерционной цепи: RC-цепочка

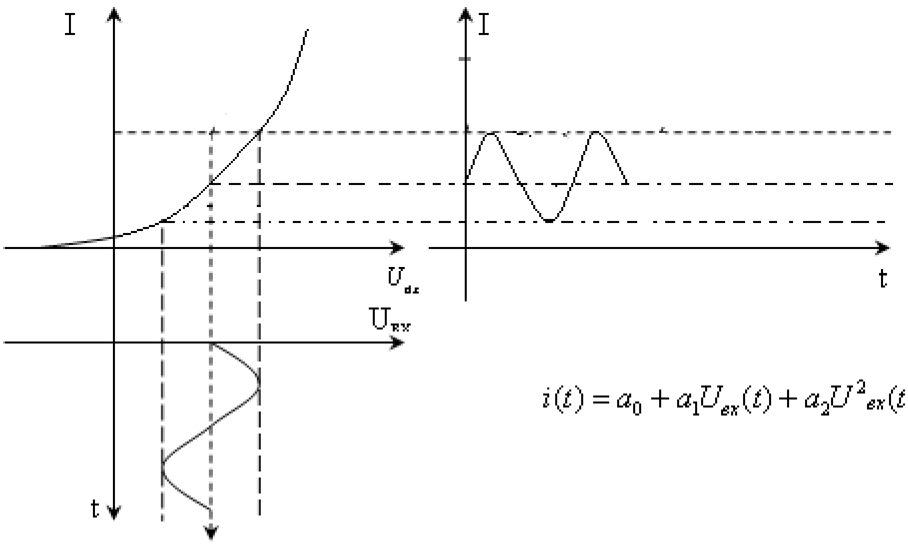
2. Зная входное напряжение $U_{вх}(t)$ и вольт-амперную характеристику (ВАХ) БНЧ найти ток $i(t)$, протекающий через БНЧ. При этом используется аппроксимация рабочего участка ВАХ.

3. Зная ток $i(t)$ и характеристики линейной цепи и используя методы анализа линейных цепей найти напряжение на выходе линейной цепи $U_{вых}(t)$.

Вид аппроксимирующей функции зависит от формы ВАХ на рабочем участке.

II.Режимы работы БНЧ

1. Режим малых сигналов (малой нелинейности).

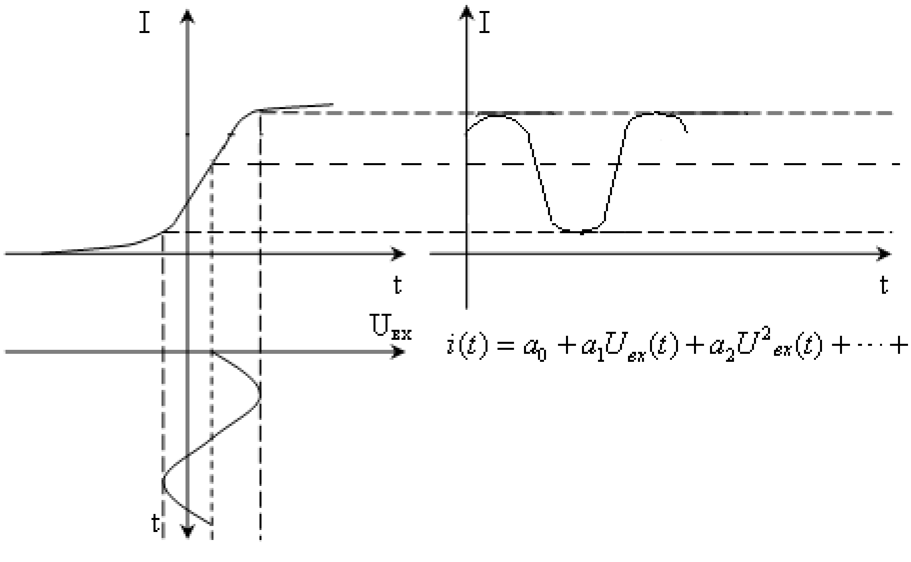


$$i(t) = a_0 + a_1 U_{вх}(t) + a_2 U^2{}_{вх}(t)$$

Рис. 9.1

В режиме малой нелинейности рабочий участок ВАХ аппроксимируется квадратичной функции, а режим нелинейности называется квадратичным режимом. На рисунке 9.1. изображена ВАХ нелинейного элемента, на которой выбран квадратичный рабочий участок. Кроме того, на рисунке показана зависимость от времени напряжения, приложенного к нелинейному элементу и тока, протекающего через этот элемент.

2.Режим сильной нелинейности или больших входных сигналов.



$$i(t) = a_0 + a_1 U_{вх}(t) + a_2 U^2{}_{вх}(t) + \cdots + a_n U^n{}_{вх}(t)$$

Рис.9.2

В режиме сильной нелинейности рабочий участок ВАХ аппроксимируется многочленом n-ой степени, а режим нелинейности называется полиномиальным режимом. На рисунке 9.2. изображена ВАХ нелинейного элемента, на которой рабочий участок аппроксимируется полиномом степени большей чем два. Кроме того, на рисунке показана зависимость от времени напряжения, приложенного к нелинейному элементу и тока, протекающего через этот элемент.

3.Режим с отсечкой тока.

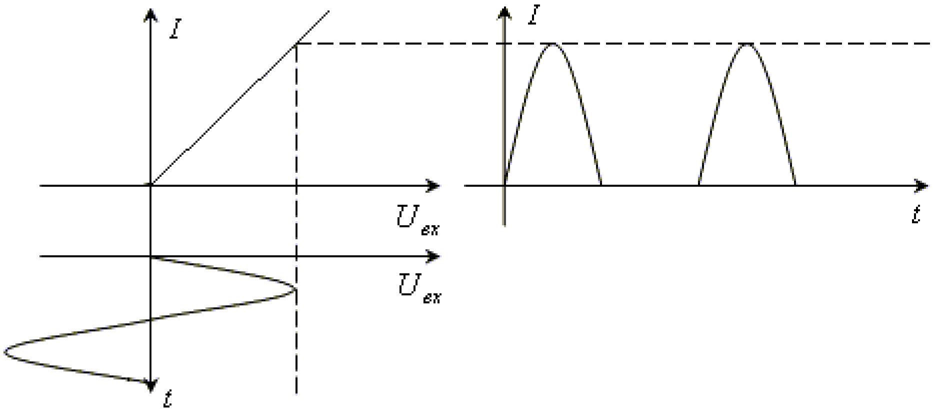


Рис.9.3.

В этом режиме используется линейно-ломаная аппроксимация ВАХ. На рисунке 9.3. изображена ВАХ нелинейного элемента, на которой выбран такой большой рабочий участок, что при некоторых значениях входного напряжения ток через нелинейный элемент не течет. Говорят, что в этом случае наступает отсечка тока. Из рисунка видно, что ток, протекающий через этот элемент, носит импульсный характер.

III.Спектральный анализ тока, протекающего через БНЧ при полиномиальной аппроксимации ВАХ

1.На входе гармонический сигнал

Входной сигнал: $U_{вх}(t) = E \cdot \cos(\omega_0 t)$

Функция, аппроксимирующая рабочий участок ВАХ

$$i(t) = a_0 + a_1 U_{вх}(t) + a_2 U^2{}_{вх}(t) + \cdots + a_n U^n{}_{вх}(t)$$

Ограничим для примера аппроксимирующую функцию полиномом 4-й степени.

Для определения спектра тока используются формулы понижения степени.

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

$$\cos^4\alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$$

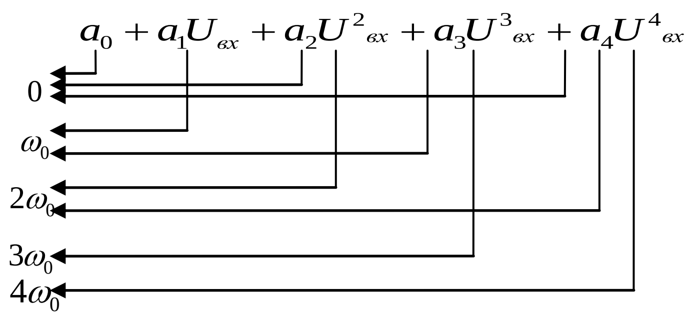
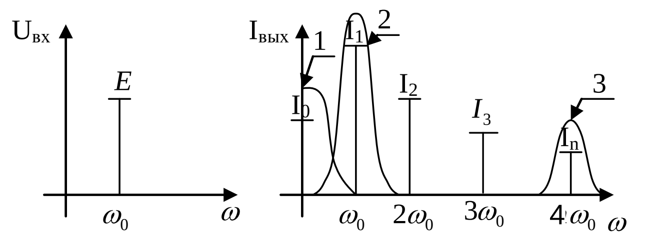


Рис 9.4

С помощью этих формул, используя рис. 9.4, мы можем представить ток в виде суммы гармоник:

$$i(t) = a_0 + \frac{a_2 E^2}{2} + \frac{3}{8}a_4 E^4 + (a_1 E + \frac{3}{4}a_3 E^3)\cdot\cos\omega_0 t + \left(\frac{a_2}{2}E^2 + \frac{a_4}{2}E^4\right)\cos 2\omega_0 t +$$

$$+\frac{a_3}{4}E^3\cos 3\omega_0 t + \frac{a_4}{8}E^4\cos 4\omega_0 t$$



1 – выпрямитель
2 – нелинейный усилитель
3 – умножитель частоты в 4 раза

рис 9.5

На рис 9.5 изображены спектры входного сигнала и спектр тока, протекающего через БНЧ, при аппроксимации рабочего участка полиномом четвертой степени, где

$$I_0 = a_0 + \frac{a_2 E^2}{2} + \frac{3}{8}a_4 E^4$$

$$I_1 = a_1 E + \frac{3}{4}a_3 E^3$$

$$I_2 = \frac{a_2}{2}E^2 + \frac{a_4}{2}E^4$$

$$I_3 = \frac{a_3}{4}E^3$$

$$I_4 = \frac{a_4}{8}E^4.$$

С помощью БНЧ, работающего в этом режиме используя различные нагрузки можно получить разные устройства.

1. Если в качестве нагрузки использовать ФНЧ (рис.9.5 АЧХ 1), то мы получим выпрямитель, который служит для преобразования переменного напряжения в постоянное.

2. Если в качестве нагрузки использовать колебательный контур с резонансной частотой $\omega_p = \omega_0$ (рис.9.5 АЧХ 2), то мы получим нелинейный резонансный усилитель.

3. Если в качестве нагрузки использовать колебательный контур с резонансной частотой $\omega_p = 4\omega_0$ (рис.9.5 АЧХ 3), то мы получим умножитель частоты в 4 раза, который служит для преобразования гармонического сигнала с частотой ω_0 в гармонический сигнал с частотой $4\,\omega_0$.

IV.Бигармонический входной сигнал и квадратичная аппроксимация.

Входной сигнал: $U_{вх}(t) = U_0 + E_1 \cos\Omega t + E_2 \cos\omega_0 t,\quad где\quad \omega_0 >> \Omega.$

Рабочий участок аппроксимируется квадратичной функцией, то есть функция, аппроксимирующая рабочий участок ВАХ, задана формулой

$i(t) = a_0 + (U_{вх}(t) - U_0)\cdot a_1 + a_2 (U_{вх}(t) - U_0)^2$

Найдем спектр тока, протекающего через нелинейный элемент. Для этого подставим функцию $U_{вх}(t)$ в формулу, описывающую зависимость тока, протекающего через нелинейный элемент, от входного напряжения. Тогда, используя формулы понижения степени и преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получим

$$i(t) = a_0 + a_1E_1\cos\Omega t + a_1E_2\cos\omega_0 t + \frac{a_2E_2^2}{2} + \frac{a_2E_2^2}{2}\cos 2\omega_0 t + \frac{a_2E_1^2}{2} + \frac{a_2E_1^2}{2}\cos 2\Omega t +$$
$$+ a_2E_1E_2\cos((\omega_0 - \Omega)t) + a_2E_1E_2\cos((\omega_0 + \Omega)t)$$

Тогда в спектре тока будут присутствовать постоянная составляющая с амплитудой $I_0 = a_0 + \frac{a_2}{2}(E_1^2 + E_2^2)$ и гармоники $I_1 = a_1E_1$ на частоте Ω, $I_2 = \frac{a_2E_1^2}{2}$ на частоте 2Ω,

$I_3 = a_1E_2$ на частоте ω_0, $I_4 = \frac{a_2E_2^2}{2}$ на частоте $2\omega_0$, $I_5 = a_2E_1E_2$ на частотах $\omega_0 \pm \Omega$.

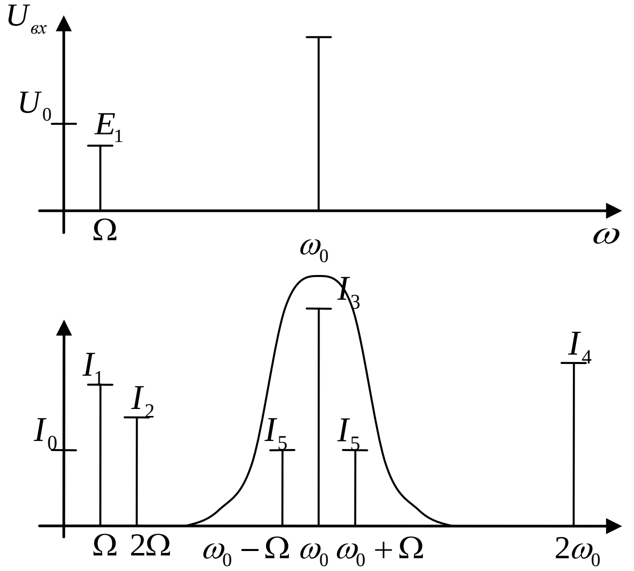


Рис 9.3

На рисунке 9.6 изображены спектр входного сигнала и спектр тока, протекающего через БНЧ.

Из приведенных формул и рисунков следует, что если на входе нелинейного четырехполюсника действует бигармоническое колебание, полученное суммированием несущего и модулирующего сигналов, а его ВАХ аппроксимируется квадратичной функцией, то в спектре тока будут присутствовать гармоники, комбинационные и кратные частотам входного сигнала. Если в качестве нагрузки использовать колебательный контур, настроенный на частоту ω_0 (рис.9.6), то на этом контуре будут выделены гармоники напряжения с частотами ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$, которые сформируют АМ колебание с тональной модуляцией с несущей частотой ω_0 и с частотой модулирующего сигнала равной Ω. При этом коэффициент глубины модуляции будет пропорционален отношению $\dfrac{I_5}{I_3} = \dfrac{a_2 E_1 E_2}{a_1 E_2} = \dfrac{a_2 E_1}{a_1}$.

V.Бигармонический входной сигнал и полиномиальная аппроксимация.

Рассмотри более общий случай, когда рабочий участок ВАХ аппроксимируется полиномом n-ой степени

$$i(t) = a_0 + (U_{вх}(t) - U_0) \cdot a_1 + a_2 (U_{вх}(t) - U_0)^2 + \ldots + a_n (U_{вх}(t) - U_0)^n,$$

а входной сигнал по-прежнему бигармонический, то есть

$$U_{вх}(t) = U_0 + E_1 \cos\Omega t + E_2 \cos\omega_0 t, \quad где \quad \omega_0 >> \Omega.$$

Используя формулы тригонометрии: кратных дуг (понижения степени) и преобразования произведения гармонических функций в сумму, можно показать, что в спектре тока будут присутствовать гармоники на частотах

$$|k\omega_0 \pm m\Omega| \quad где \quad \begin{cases} k = 0, n \\ m = 0, n \\ k + m \le n \end{cases}.$$

Так при $n = 3$ рабочий участок ВАХ аппроксимируется функцией $i(t) = a_0 + (U_{вх}(t) - U_0) \cdot a_1 + a_2 (U_{вх}(t) - U_0)^2 + a_3 (U_{вх}(t) - U_0)^3$ и в спектре тока будут присутствовать частоты:

- из-за свободного члена 0;

- из-за линейного члена $\Omega, \ \omega_0$;

- из-за квадратичного члена $0, \ 2\Omega, \ 2\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$;

- из-за кубичного члена $\Omega, \ \omega_0, \ 3\Omega, \ 3\omega_0, \omega_0 \pm 2\Omega, \ 2\omega_0 \pm \Omega$.

Если в качестве нагрузки по-прежнему использовать колебательный контур, настроенный на частоту ω_0, то на этом контуре будут выделены гармоники напряжения с частотами ω_0, $\omega_0 \pm \Omega$ и $\omega_0 \pm 2\Omega$. Присутствие гармоник с частотами $\omega_0 \pm 2\Omega$ в спектре напряжения будет искажать форму огибающей АМ колебание с тональной модуляцией. Таким образом , выход за пределы квадратичного участка ВАХ при формировании АМ колебания нежелателен.

Контрольные вопросы к лекции 9

1. Почему нелинейные цепи сложнее анализировать, чем линейные?
2. Из каких этапов состоит анализ нелинейной цепи?
3. Какие виды аппроксимации ВАХ БНЧ вы знаете?
4. От чего зависит вид аппроксимирующей функции?
5. Какие частоты входят в состав спектра тока, если на вход БНЧ подан гармонический сигнал и рабочий участок ВАХ аппроксимирован полиномом четвертой степени?
6. Какие радиотехнические устройства можно получить, используя БНЧ в сочетании с различными нагрузками, если рабочий участок ВАХ описывается полиномом четвертой степени, а на вход нелинейного четырехполюсника подан гармонический сигнал?
7. Какие частоты будут присутствовать в спектре тока, если рабочий участок ВАХ описывается квадратичной функцией, а на вход нелинейного четырехполюсника подан бигармонический сигнал с частотами 2 кгц и 220 кгц?
8. Какую нагрузку следует использовать в сочетании с БНЧ, работающим в квадратичном режиме, чтобы на этой нагрузке получить АМ-колебание с тональной модуляцией? Какой сигнал при этом должен действовать на входе?
9. Какие частоты будут присутствовать в спектре тока, если рабочий участок ВАХ описывается полиномом третьей степени, а на вход нелинейного четырехполюсника подан бигармонический сигнал с частотами 2 кгц и 220 кгц?
10. Какие частоты будут присутствовать в спектре тока, если рабочий участок ВАХ описывается квадратичной функцией, а на вход нелинейного четырехполюсника подано АМ колебание с тональной модуляцией с модулирующей частотой 2 кгц и несущей частотой 220 кгц?
11. На входе БНЧ, работающего в квадратичном режиме, подано АМ колебание. Какое устройство получится, если БНЧ нагрузить на ФНЧ?

Типовые задачи к экзамену

1. Рабочий участок проходной ВАХ транзистора аппроксимирован полиномом третьей степени $i_к=a_0+a_1(u_{бэ}-U_0)+a_2(u_{бэ}-U_0)^2+a_3(u_{бэ}-U_0)^3$. Амплитуда гармонического напряжения на базе транзистора E=2в. Определить амплитуду первой гармоники спектра коллекторного тока, если a_0=1ма, a_1=20ма/в, a_2=900ма/$в^2$, a_3=10000ма/$в^3$. Какие устройства можно сформировать, используя эту нелинейность в сочетании с различными нагрузками?
2. Рабочий участок проходной ВАХ транзистора аппроксимирован полиномом третьей степени $i_к=a_0+a_1(u_{бэ}-U_0)+a_3(u_{бэ}-U_0)^3$. Напряжение на базе транзистора $u_{бэ}(t)=U_0+E_1\cos(2\pi f_1 t)+E_2\cos(2\pi f_2 t)$. Определить частотный состав спектра коллекторного тока, если f_1=2кгц, f_2=102кгц. Какие устройства можно сформировать, используя эту нелинейность в сочетании с различными нагрузками?
3. Рабочий участок проходной ВАХ транзистора аппроксимирован полиномом второй степени $i_к=a_0+a_1(u_{бэ}-U_0)+a_2(u_{бэ}-U_0)^2$. На базу транзистора подано напряжение $u_{бэ}(t)=U_0+5(1+0{,}8\cos(4\pi 10^3 t))\cos(2\pi 10^5 t)$ Определить частоты спектра коллекторного тока, если a_0=1ма, a_1=60ма/в, a_2=900ма/$в^2$, E_1=0,02в. Какие устройства можно сформировать, используя эту нелинейность в сочетании с различными нагрузками?