Лекция №13

([6], стр. 16-55; [7], стр. 9-56).

Спектральный анализ периодических сигналов.

Сигнал.

Сигнал – процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи информации.

Информационная мера сигнала

При выборе функции, которая могла бы описать количество информации в принятом сообщении, использовались следующие очевидные утверждения.

1. Чем неожиданнее сообщение А, тем больше информации приносит это сообщение.

2. Достоверное сообщение не несёт информации.

3. Количество информации в 2 независимых сообщениях равно сумме количества информации в каждом из них.

Всем этим утверждениям удовлетворяет функция $I(A) = -\log_a P(A)$, которой и описывается количество информации, содержащееся в сообщении «А».

$I(A) = -\log_a P(A)$ - количество информации.

$P(A)$ - вероятность события А.

Проверим выполнение сделанных выше утверждений для функции $I(A)$.

Утверждение 1. Чем неожиданнее сообщение, тем больше информации приносит это сообщение. Действительно, $\lim\limits_{P(A)\to 0} I(A) = \infty$.

Утверждение 2. Достоверное сообщение не несёт информации. Действительно, если $P(A) = 1$, то $I(A) = -log_a 1 = 0$.

Утверждение 3. Количество информации в 2 независимых сообщениях равно сумме количества информации в каждом из них. Действительно, поскольку вероятность наступления двух независимых сообщений равна произведению вероятностей этих сообщений, то есть $P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$, то

$I(A,B) = -log_a P(A,B) = -log_a(P(A) \cdot P(B)) = -log_a P(A) - log_a P(B) = I(A) + I(B)$ Основание логарифма a=2. Тогда количество информации будет измеряться в двоичных единицах или в «bit».

Классификация сигналов.

1. По информационному признаку:

а) Детерминированные (полностью известные) (управляющие сигналы, не несущие информации, а используемые для подключения и отключения устройств и для снятия информации с этих устройств).

б) Случайные сигналы – сигналы, значение и форму которых мы заранее не знаем (например, речь).

2. По характеру изменения во времени.

По характеру изменения во времени все сигналы делятся на периодические (гармонический сигнал) и непериодические (импульс).

Периодические и непериодические сигналы могут быть:

а) Произвольными по величине и непрерывными по времени. Такие сигналы называются аналоговыми (континуальными).

б) Дискретные по величине и непрерывные во времени – квантованные сигналы.

в) Дискретные по времени и непрерывные по величине – дискретные сигналы.

г) Дискретные по величине и по времени – цифровые.

Спектральный анализ периодических сигналов.

Спектральный анализ позволяет представить каждый сигнал в виде суммы гармонических сигналов. Используя принцип суперпозиции, мы можем найти отклик каждой гармоники на выходе цепи, а затем, сложив эти отклики, получить выходной сигнал. Откликом от каждой гармоники будет гармоника с той же частотой, но с другой амплитудой и начальной фазой. Поэтому спектральный анализ используется для определения выходного сигнала, если известен входной сигнал и схема цепи.

Амплитуду гармоники на выходе можно получить умножением амплитуды гармоники на входе на соответствующее значение АЧХ. Начальную фазу гармоники на выходе можно получить сложением начальной фазы гармоники на входе со значением ФЧХ на данной частоте. Тогда

$$S_{BX}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_0) \Rightarrow S_{ВЫХ}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t + \Psi_n)$$

$$B_n = A_n АЧХ(n\omega_1)$$

$$\Psi_n = \varphi_n + ФЧХ(n\omega_1)$$

Спектральный анализ периодических сигналов на основе тригонометрических рядов Фурье.

Если сигнал периодический, то его можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t$, где:

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)dt$ - среднее значение сигнала за период - его постоянная составляющая.

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\cos n\omega_1 t dt$ - косинусная составляющая сигнала.

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\sin n\omega_1 t dt$ - синусная составляющая сигнала.

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ - частота первой гармоники; T – период повторения сигнала.

Спектр периодического сигнала – дискретная функция частоты, в которой частота принимает значения, кратные частоте первой гармоники ω_1:

$\omega = k\omega_1, k \in Z_0$

Гармоническим спектром сигнала называется зависимость коэффициентов a_n и b_n от частоты.

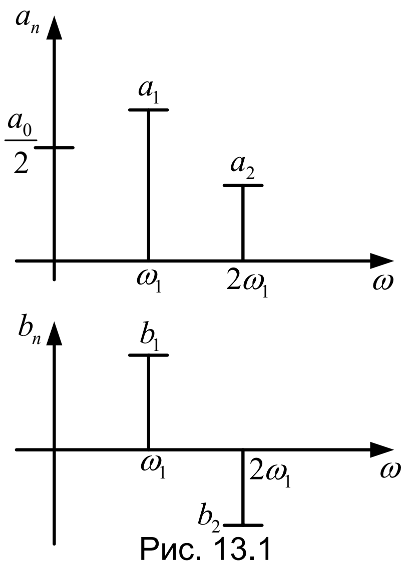

Рис. 13.1

На рисунке 13.1 изображен общий вид гармонического спектра сигнала.

Обычно тригонометрический ряд Фурье записывают в другой форме.

$$S_{BX}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} - \textit{постоянная составляющая}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, n \geq 1$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -arctg\dfrac{b_n}{a_n}, a_n > 0 \\ -arctg\dfrac{b_n}{a_n} \pm \pi, a_n < 0 \end{cases}$$

Зависимость амплитуд гармоник от частоты этих гармоник называется *односторонним амплитудным спектром* периодического сигнала.

Зависимость начальных фаз гармоник от их частоты называется *односторонним фазовым спектром* периодического сигнала.

На рисунке 13.2 приведен общий вид одностороннего амплитудного и одностороннего фазового спектров периодического сигнала.

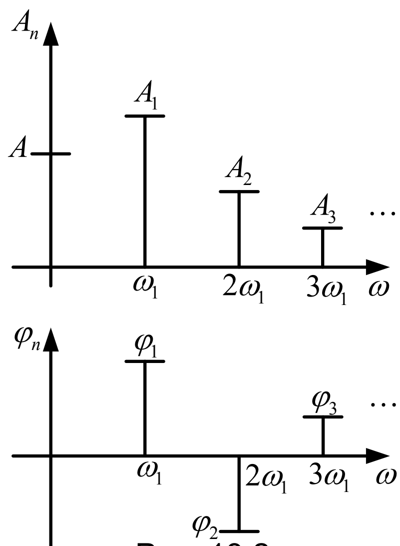

Рис. 13.2

Решим несколько примеров, в которых определим односторонние амплитудный и фазовый спектры.

Пример 1. Изобразим односторонний амплитудный и фазовый спектры заданного сигнала:

$S(t) = E\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + \frac{E}{2}\cos(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$ (см. рис. 13.3).

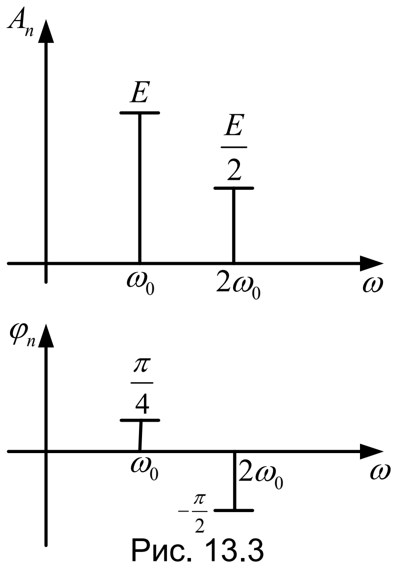

Рис. 13.3

Пример 2. Изобразим односторонний амплитудный и фазовый спектры заданного сигнала:

$S(t) = E + \frac{E}{2}\cos(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$ (см. рис. 13.4).

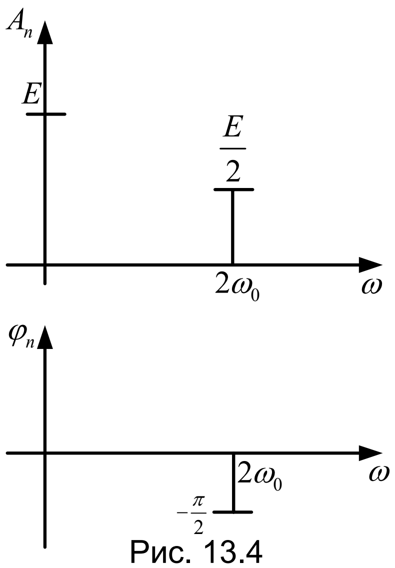

Рис. 13.4

Пример 3. Изобразите сигнал $S(t) = E + E\cos\omega_0 t$ и его односторонний амплитудный и фазовый спектры.

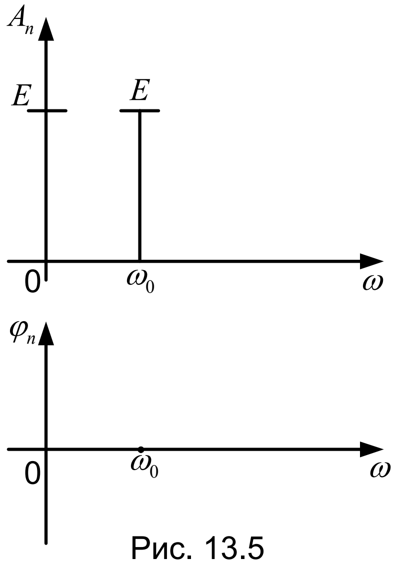

Рис. 13.5

На рисунке 13.5 изображены односторонний амплитудный и фазовый спектры заданного сигнала. График сигнала изобразите самостоятельно.

Пример 4. На рисунке 13.6. изображен односторонний амплитудный и фазовый спектр сигнала. Найдите аналитическое выражение этого сигнала.

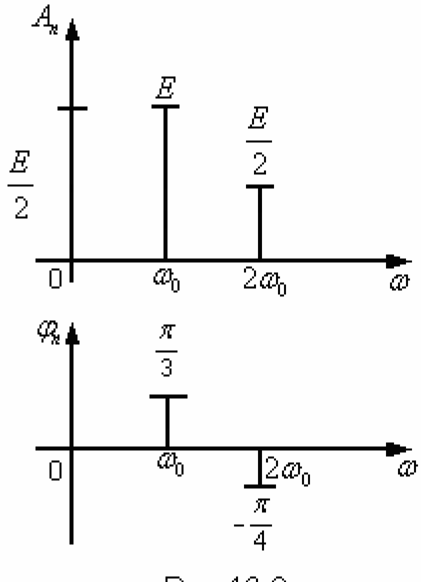

Рис.13.6

В спектре сигнала содержатся постоянная составляющая с амплитудой $\frac{E}{2}$ и две гармоники на частотах ω_0 и $2\omega_0$ с амплитудами E и $\frac{E}{2}$ и начальными фазами $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{4}$ соответственно. Тогда сигнал $S(t) = \frac{E}{2} + E\,cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{E}{2}cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$

Контрольные вопросы к лекции №13

1. Дайте определение сигналу.
2. Какие утверждения используются при выборе функции, описывающей количество информации?
3. Как классифицируются сигнала по информационному признаку?
4. Как классифицируются сигнала по характеру изменения во времени?
5. Для чего нужен спектральный анализ периодических сигналов?
6. Как определить постоянную составляющую сигнала?
7. От чего зависит частота первой гармоники в спектре периодического сигнала?
8. Дайте определение гармоническому спектру сигнала.
9. Дайте определение одностороннему амплитудному спектру сигнала.
10. Дайте определение одностороннему фазовому спектру сигнала

Типовые задачи к экзамену

1. Период сигнала $T = 0{,}5$ мс. Найдите частоту третьей гармоники
2. Сигнал задан формулой $S(t) = 2\cos^2\left(4\pi \cdot 10^3 t\right)$. Найдите амплитуду постоянной составляющей сигнала.
3. Сигнал задан формулой $S(t) = 1 + 2\cos\left(4\pi \cdot 10^3 t + \dfrac{\pi}{3}\right) +$. Найдите гармонический, односторонний амплитудный и односторонний фазовый спектры этого сигнала.
4. Сигнал задан формулой $S(t) = 2 + \cos\left(4\pi \cdot 10^3 t\right) + \sin\left(4\pi \cdot 10^3 t\right)$. Найдите гармонический, односторонний амплитудный и односторонний фазовый спектры этого сигнала.
5. На рисунке 13.7. изображен односторонний амплитудный и фазовый спектр сигнала. Найдите аналитическое выражение этого сигнала.

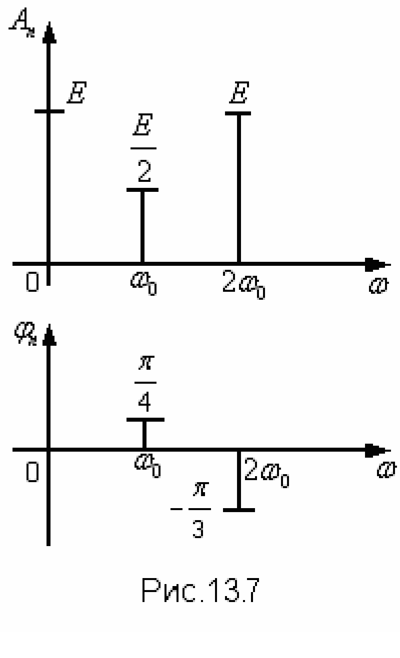

Рис.13.7