

Лекция № 12. ([2], стр. 53-61).

Диаграмма нулей и полюсов передаточной функции. Связь передаточной функции с основными характеристиками цепей.

1. Связь шести основных характеристик линейных цепей друг с другом.

Изобразим на схеме связь между шестью характеристиками линейной цепи: передаточной функцией $K(p)$, комплексно-частотной характеристикой $K(j\omega)$, амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), фазочастотной характеристикой (ФЧХ), импульсной $g(t)$ и переходной $h(t)$ характеристиками. Из этой схемы (см. рис12.1) вы можете понять, как, зная одну из характеристик, вычислить остальные.

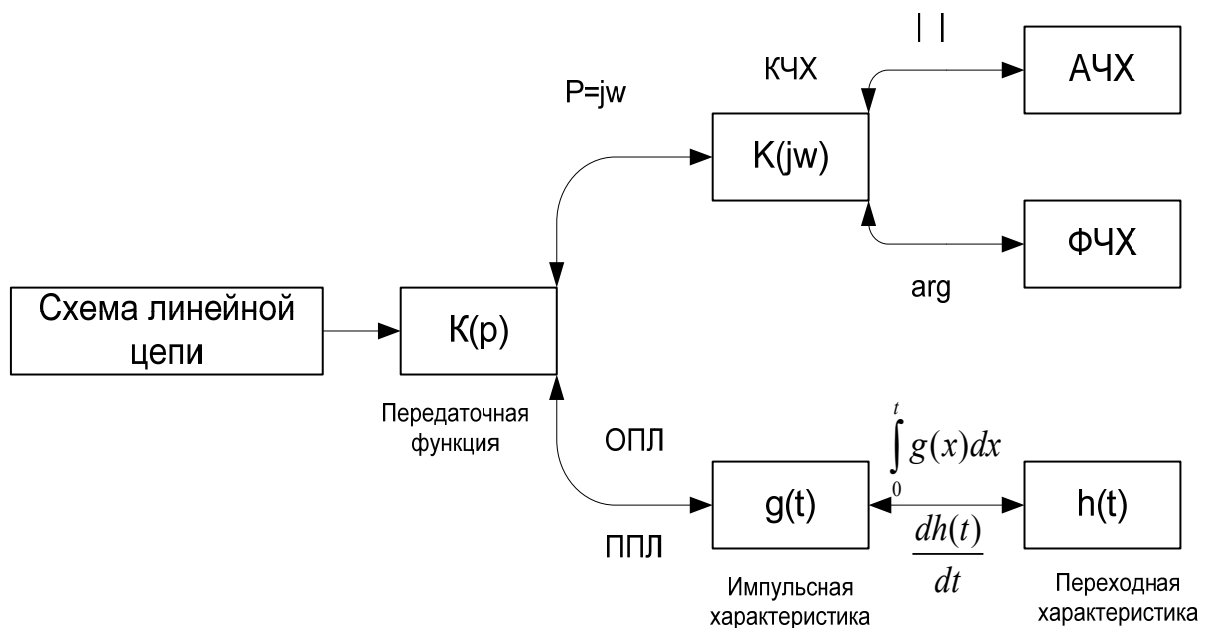


Рис.12.1

Связи между характеристиками были установлены раньше. Приведенная схема позволяет систематизировать полученные сведения. Из этой схемы в частности следует, что, зная передаточную функцию цепи можно с помощью обратного преобразования Лапласа найти ее импульсную характеристику и наоборот, зная импульсную характеристику цепи можно с помощью прямого преобразования Лапласа найти ее передаточную функцию. С помощью схемы вы самостоятельно можете установить связи между другими характеристиками цепи.

Напомним, что переменная $p = \sigma + j\omega$, используемая в качестве аргумента в преобразовании Лапласа, имеет размерность c^{-1} . У этой переменной действительная часть σ называется затуханием, а мнимая $j\omega$ - циклической частотой. Эти понятия мы будем использовать при анализе влияния диаграммы полюсов передаточной функции на поведение импульсной характеристики. Они используются при описании сигнала $S(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t$, амплитуда которого меняется по экспоненте. Причем сигнал затухает по амплитуде при $\sigma < 0$ и нарастает при $\sigma > 0$.

2. Связь диаграмм “нулей” и “полюсов” передаточной функции с импульсной характеристикой линейной цепи.

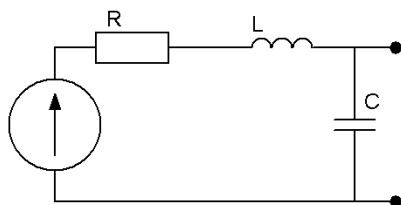
Установим связь диаграмм “нулей” и “полюсов” передаточной функции линейной цепи с ее импульсной характеристикой. Передаточную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов, разложив которые на множители, получим

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n (p - p_{01}) \dots (p - p_{0n})}{b_m (p - p_{n1}) \dots (p - p_{nm})}, \text{ где}$$

P_{0k} - нуль, значение переменной P , при котором числитель обращается в 0.

P_{ni} - полюс, значение переменной P , при котором знаменатель обращается в 0.

Исследуем влияния диаграммы “нулей” и “полюсов” передаточной функции последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой на его импульсную характеристику. Для этого, зная КЧХ контура, найдем его передаточную функцию и импульсную характеристику. Для определения передаточной функции по КЧХ достаточно заменить « $j\omega$ » в формуле КЧХ на « p ».



$$K(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$K(p) = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

Найдем полюса:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_p^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_{n1} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} \\ p_{n2} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{n1} = -\alpha + j\sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} \\ p_{n2} = -\alpha - j\sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{n1} = -\alpha + j\omega_{ce} \\ p_{n2} = -\alpha - j\omega_{ce} \end{cases}$$

где:

$\omega_p^2 = \frac{1}{LC}$ - квадрат резонансной частоты контура,

$2\alpha = \frac{R}{L}$ - затухание контура, $\sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} = \omega_{ce}$ - частота свободных колебаний

контура, $p_{n1,2} = -\alpha \pm j\omega_{ce}$ - полюса передаточной функции.

Импульсную характеристику найдем с помощью обратного преобразования Лапласа от передаточной функции.

$$\begin{aligned}
 g(t) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \lim_{p \rightarrow -\alpha + j\omega_{c\theta}} \frac{\omega_p^2 e^p (p + \alpha - j\omega_{c\theta})}{(p + \alpha + j\omega_{c\theta})(p + \alpha - j\omega_{c\theta})} \right\} = 2\omega_p^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{(-\alpha + j\omega_{c\theta})t}}{-\alpha + j\omega_{c\theta} + \alpha + j\omega_{c\theta}} \right\} \cdot 1(t) = \\
 &= 2\omega_p^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-\alpha t} e^{j\omega_{c\theta} t}}{2j\omega_{c\theta}} \right\} \cdot 1(t) = \omega_p^2 e^{-\alpha t} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos \omega_{c\theta} t + j \sin \omega_{c\theta} t}{j\omega_{c\theta}} \right\} \cdot 1(t) = \\
 &= \omega_p^2 e^{-\alpha t} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos \omega_{c\theta} t}{j\omega_{c\theta}} + \frac{j \sin \omega_{c\theta} t}{j\omega_{c\theta}} \right\} \cdot 1(t) = \frac{\omega_p^2}{\omega_{c\theta}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{c\theta} t \cdot 1(t)
 \end{aligned}$$

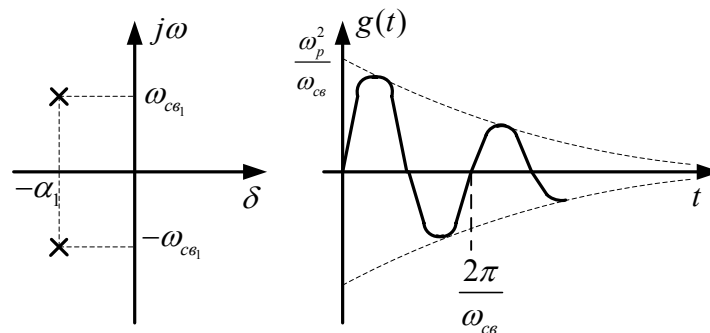


Рис.12.2.

На рисунке 12.2. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при затухании $\alpha_1 > 0$ и частоте свободных колебаний $\omega_{c\theta 1}$.

При смещении полюсов влево импульсная характеристика затухает быстрее.

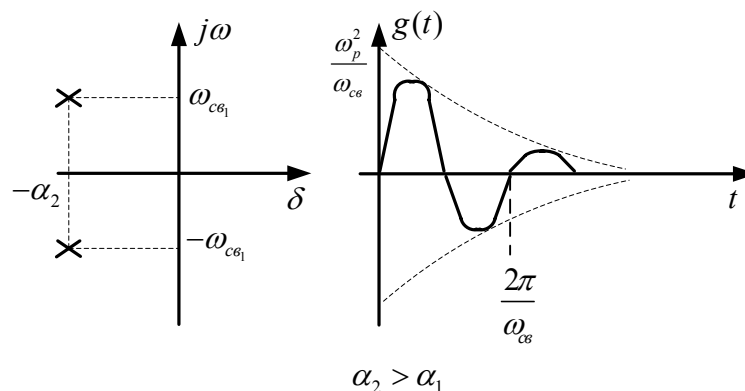


Рис. 12.3.

На рисунке 12.3. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при смещении полюсов влево, то есть при увеличении затухания контура α ($\alpha_2 > \alpha_1$).

Если затухание отрицательно, то полюса лежат в правой полуплоскости, и импульсная характеристика нарастает с ростом аргумента. Это означает

неустойчивость данной линейной цепи, т.е. после прекращения воздействия извне (входного сигнала) напряжение на выходе не стремится к нулю.

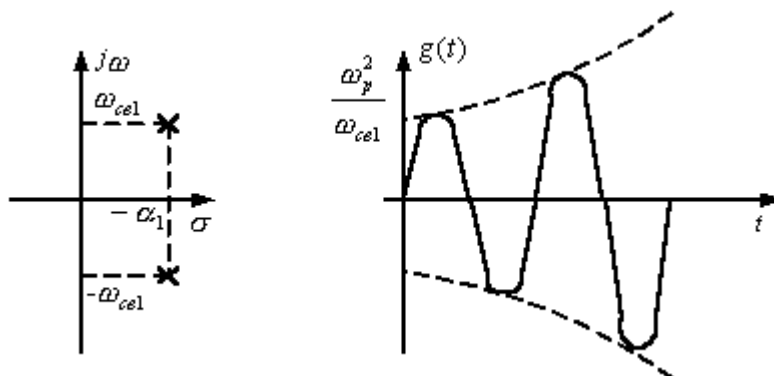
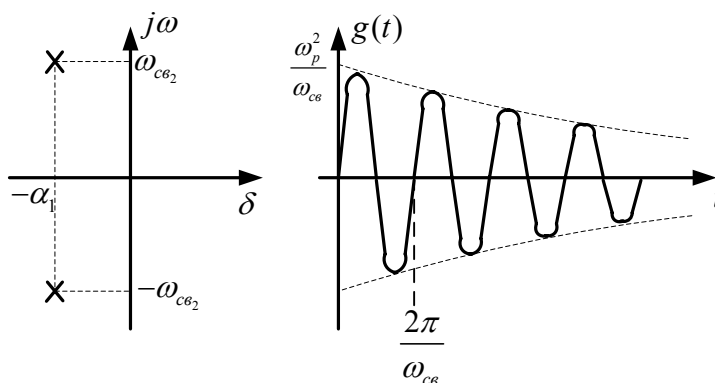


Рис.12.4.

На рисунке 12.4. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при отрицательном затухании контура ($\alpha_1 < 0 \Leftrightarrow -\alpha_1 > 0$), когда полюса передаточной функции расположены в правой полуплоскости плоскости p .

С увеличением частоты свободных колебаний $\omega_{c\epsilon}$ при том же затухании α диаграмма полюсов расширяется относительно оси абсцисс, а импульсная характеристика, сохранив ту же скорость убывания, будет иметь более высокочастотное заполнение.



$$\omega_{c\epsilon_2} > \omega_{c\epsilon_1}$$

Рис. 12.5

На рисунке 12.5. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при исходном затухании $\alpha_1 > 0$ и частоте свободных колебаний $\omega_{c\epsilon_2} > \omega_{c\epsilon_1}$.

3. Признак устойчивости линейной цепи:

Из приведенных результатов следует, что, если полюса передаточной функции линейной цепи лежат в левой полуплоскости, то линейная цепь устойчива, если же полюса лежат в правой полуплоскости, то система неустойчива. Неустойчивость цепей используется в автогенераторах для формирования гармонических колебаний.

4. Алгоритм построения АЧХ и ФЧХ линейной цепи по диаграмме “нулей” и “полюсов” её передаточной функции.

Представим передаточную функцию в виде отношения двух многочленов, разложив которые на множители, получим

$$K(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^m + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{p^n + \dots + \frac{a_0}{a_n}}{p^m + \dots + \frac{b_0}{b_m}} = k \cdot \frac{(p - p_{01}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_{n1}) \dots (p - p_{nm})}, \quad m \geq n$$

$$k = \frac{a_n}{b_m}$$

Перейдем от передаточной функции к КЧХ, заменив «р» на « $j\omega$ ». Тогда

$$P = j\omega \Rightarrow K(j\omega) = K \frac{(j\omega - P_{01}) \dots (j\omega - P_{0n})}{(j\omega - P_{n1}) \dots (j\omega - P_{nm})}$$

$$j\omega - P_{0k} = \vec{Q}_k(\omega)$$

$$j\omega - P_{ni} = \vec{R}_i(\omega)$$

$$K(j\omega) = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)| e^{j\varphi_k(\omega)}}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)| e^{j\Psi_i(\omega)}} = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)| e^{j \sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega)}}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)| e^{j \sum_{i=1}^m \Psi_i(\omega)}} = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)|}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)|} e^{j(\sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega) - \sum_{i=1}^m \Psi_i(\omega))}$$

Геометрическим образом разности $j\omega - P_{0k} = \vec{Q}_k(\omega)$ будет вектор $\vec{Q}_k(\omega)$, проведенный из точки, отображающей ноль передаточной функции P_{0k} , к точке $j\omega$. Геометрическим образом разности $j\omega - P_{ni} = \vec{R}_i(\omega)$ будет вектор $\vec{R}_i(\omega)$, проведенный из точки, отображающей полюс передаточной функции P_{ni} , к точке $j\omega$. Напомним, что АЧХ это модуль КЧХ, а ФЧХ – аргумент КЧХ. Тогда

$$AЧХ = |K(j\omega)| = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)|}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)|} \quad (12.1),$$

$$\PhiЧХ = \arg K(j\omega) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega) - \sum_{i=1}^m \Psi_i(\omega)$$

где $|K| = \left| \frac{a_n}{b_m} \right|$,

$|\vec{Q}_k(\omega)|$ - модуль (длина) вектора $\vec{Q}_k(\omega)$, проведенного из точки, отображающей ноль передаточной функции P_{0k} , к точке $j\omega$, $\varphi_k(\omega)$ - аргумент этого же вектора (угол между этим вектором и положительным направлением действительной оси),

$|\vec{R}_i(\omega)|$ - модуль (длина) вектора $\vec{R}_i(\omega)$, проведенного из точки, отображающей полюс передаточной функции P_{ni} , к точке $j\omega$, $\psi_i(\omega)$ - аргумент этого же вектора (угол между этим вектором и положительным направлением действительной оси).

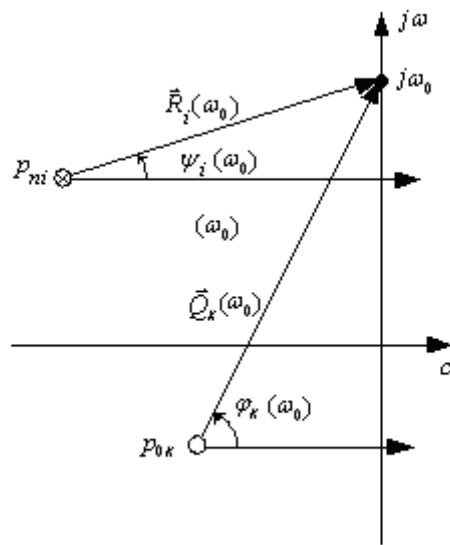


Рис.12.6.

На рисунке 12.6 изображены полюс передаточной функции P_{ni} (отмечен знаком \otimes), ноль передаточной функции P_{0k} (отмечен знаком \odot), векторы $\vec{Q}_k(\omega_0)$ и $\vec{R}_i(\omega_0)$, проведенные к точке $j\omega_0$ и их аргументы $\varphi_k(\omega_0)$ и $\psi_i(\omega_0)$ соответственно. С учетом выше сказанного и формул (12.1) рассмотрим алгоритм построения АЧХ и ФЧХ по диаграмме нулей и полюсов передаточной функции.

Алгоритм построения АЧХ.

1. Найти “нули” и “полюса” передаточной функции.
2. Изобразить в выбранном масштабе эти нули и полюса на плоскости P .
3. Выбрать на оси ординат точку, соответствующую частоте ω_0 , для которой хотим рассчитать АЧХ.
4. Измерить расстояние от всех нулей до этой точки в выбранном масштабе.
5. Найти их произведение. Если нулей нет, то числитель дроби,

описывающий АЧХ, принимается равным $|K| = \left| \frac{a_n}{b_m} \right|$.

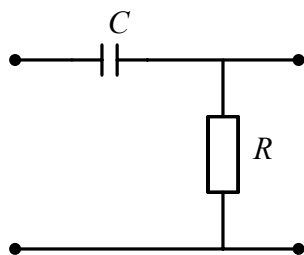
6. Сделать пункты 4-5 пункты для полюсов.
7. Разделить первое произведение на второе.
8. Перейти к следующей частоте и проделать пункты 1-7 снова.

Алгоритм построения ФЧХ.

- 1-3. См. предыдущий алгоритм.
4. Измерить углы $\varphi_k(\omega_0)$ и найти их сумму.
5. Измерить углы $\psi_i(\omega_0)$ и найти их сумму.
6. Найти разность между первой суммой и второй.
7. Перейти к следующей частоте и проделать пункты 1-6 снова.

Пример:

Построить АЧХ CR цепи по диаграмме нулей и полюсов её передаточной функции.



Найдем передаточную функцию CR-цепи, нуль и полюса передаточной функции. Тогда

$$K(p) = \frac{p\tau_0}{p\tau_0 + 1} = \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_0}}$$

$$p_{01} = 0$$

$$p_{n1} = -\frac{1}{\tau_0}$$

Изобразим диаграмму нулей и полюсов и построим векторы $\vec{Q}_1(\omega_0)$ и $\vec{R}_1(\omega_0)$ для произвольной частоты ω_0 (см. рис. 12.7).

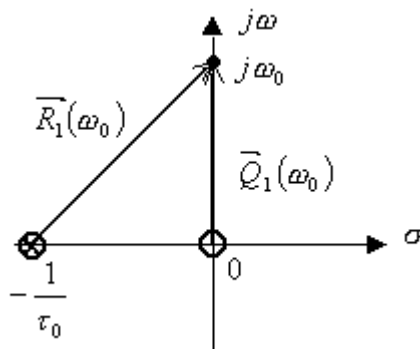


Рис.12.7.

АЧХ заданной цепи будет определяться отношением $\frac{|\vec{Q}_1(\omega)|}{|\vec{R}_1(\omega)|}$. График

зависимости этого отношения от частоты ω приведен на рисунке 12.8.

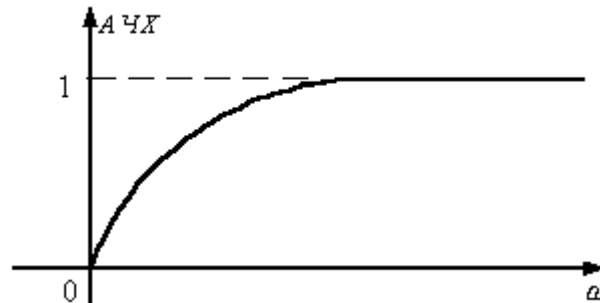


Рис. 12.8.

Контрольные вопросы к лекции №12

1. Используя рисунок 12.1, поясните, как по передаточной функции линейной цепи найти ее амплитудно-частотную характеристику?
2. Используя рисунок 12.1, поясните, как по передаточной функции линейной цепи найти ее фазочастотную характеристику?
3. Используя рисунок 12.1, поясните, как по передаточной функции линейной цепи найти ее переходную характеристику?
4. Используя рисунок 12.1, поясните, как по переходной характеристике линейной цепи найти ее передаточную функцию?
5. Используя рисунок 12.1, поясните, как по переходной характеристике линейной цепи найти ее амплитудно-частотную характеристику?
6. Сформулируйте признак устойчивости линейной цепи.
7. Сформулируйте алгоритм построения АЧХ линейной цепи по диаграмме нулей и полюсов.
8. Сформулируйте алгоритм построения ФЧХ линейной цепи по диаграмме нулей и полюсов
9. Как изменится АЧХ CR-цепи в рассмотренном примере, если полюс передаточной функции приблизить к оси $j\omega$?

Типовые задачи к экзамену

1. Передаточная функция цепи имеет два полюса $p_{п1} = -0,5+2j$, $p_{п2} = -0,5-2j$. Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

2. Передаточная функция цепи имеет один ноль $p_{01} = 0$ и два полюса $p_{п1} = -0,5+2j$, $p_{п2} = -0,5-2j$. Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

3. Передаточная функция цепи имеет два одинаковых нуля $p_{01} = p_{02} = 0$ и два полюса $p_{п1} = -0,5+2j$, $p_{п2} = -0,5-2j$. Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

4. Постройте АЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой по диаграмме нулей и полюсов его передаточной функции, если $R = 2$ [кОм], $L = 1$ [мГн], $C = 10$ [мкФ].