Лекция № 9.

([2], стр. 42-48; [5], стр. 27-34).

Составление операторного уравнения на основе принципиальной схемы цепи.

1. Замещение пассивных двухполюсников.

Операторное уравнение цепи необходимо для анализа переходных процессов операторным методом. При составлении операторного уравнения на основе принципиальной схемы цепи в самой схеме происходит замена реальных элементов цепи на их операторные эквиваленты.

Установим связь между токами и напряжениями на пассивных элементах и их операторными изображениями. Это позволит найти операторные эквиваленты пассивных элементов. Для этого мы будем использовать свойства преобразования Лапласа, разобранные в предыдущей лекции.

Резистор

Используя свойство линейности, перейдем от функций времени к их изображениям. Тогда получим

$$R: U_R(t) = Ri_R(t) \doteq \hat{U}_R(p) = R\hat{I}_R(p)$$

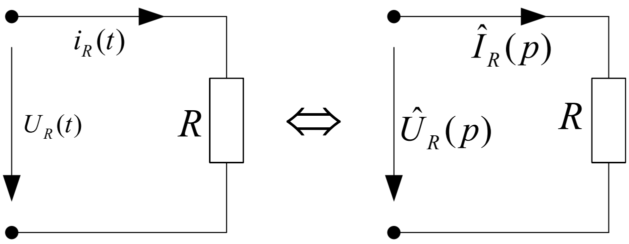

Рис. 9.1

Таким образом, в операторной схеме замещения резистор остается резистором (см.рис.8.1).

Конденсатор

Используя свойство дифференцирования оригинала, перейдем от функций времени к их изображениям. Тогда получим

$$i_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt} \doteq \hat{I}_C(p) = C\left(p\hat{U}_C(p) - U_C(0)\right)$$

$$\hat{I}_C(p) = pC\hat{U}_C(p) - CU_C(0)$$

$$\hat{U}_C(p) = \frac{1}{pC}\hat{I}_C(p) + \frac{U_C(0)}{p}$$

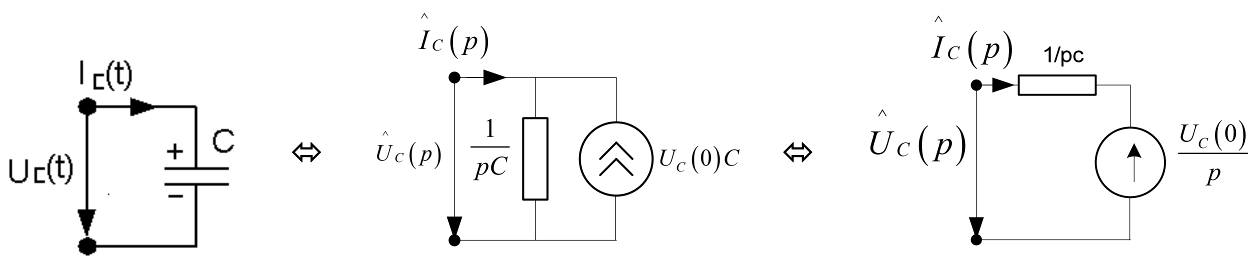

Рис. 9.2

Таким образом, конденсатор при ненулевых начальных условиях заменяется в схеме замещения на операторное емкостное сопротивление $\frac{1}{pC}$ и источник тока $U_C(0)C$ или источник напряжения $\frac{U_C(0)}{p}$, где $U_C(0)$- значение напряжения на конденсаторе в нулевой момент времени (см.рис.9.2). При нулевых начальных условиях, когда на ёмкости в момент коммутации нет заряда, ёмкость заменяется только на емкостное операторное сопротивление.

Индуктивность

Используя свойство дифференцирования оригинала, перейдем от функции времени к их изображениям. Тогда получим

$$U_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \doteq \hat{U}_L(p) = pL\hat{I}_L(p) - Li_L(0)$$

$$\hat{I}_L(p) = \frac{\hat{U}_L(p)}{pL} + \frac{i_L(0)}{p}$$

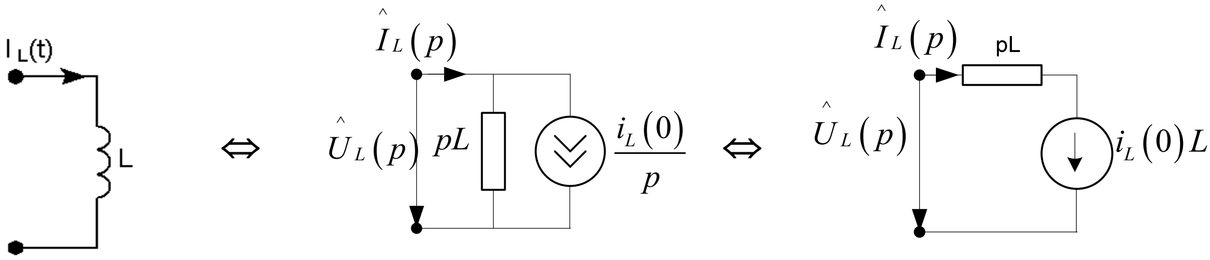

Рис. 9.3

При ненулевых начальных условиях катушка индуктивности заменяется в схеме замещения на операторное индуктивное сопротивление pL и независимый источник тока $\frac{i_L(0)}{L}$ или источник напряжения $i_L(0)p$, где $i_L(0)$ - ток через индуктивность в нулевой момент времени (см.рис.9.3). При нулевых начальных условиях, когда в момент коммутации ток через индуктивность равен нулю, индуктивность заменяется на операторное индуктивное сопротивление *pL*.

Пример:

Для заданной схемы составить и решить операторное уравнение.

Дано: схема цепи (см.рис.9.4)

$R_1, R_2, C_1, C_2, e(t), U_{C_1}(0), U_{C_2}(0)$

$U(t) - ?$

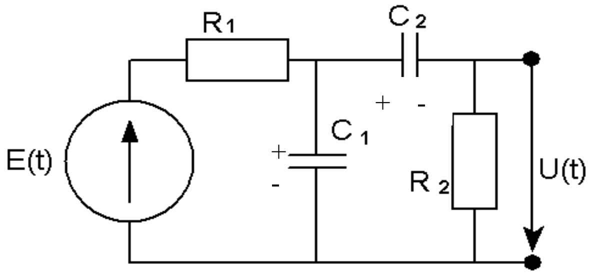

Рис 9.4

Решение:

Составим схему замещения:

$$\hat{E}_1(p)=\frac{U_{C_1}(0)}{p};\hat{E}_2(p)=\frac{U_{C_2}(0)}{p}$$

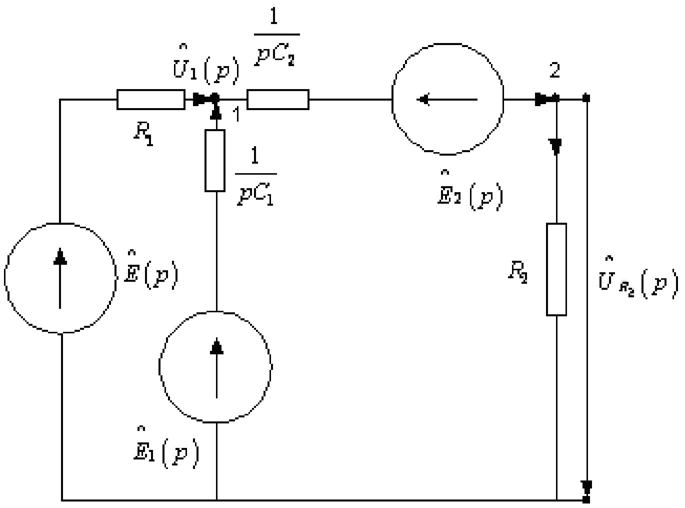

Рис 9.5

Используя закон Кирхгофа для узла, составим 2 операторных уравнения для полученной эквивалентной схемы:

$$\begin{cases}\dfrac{\hat{E}(p)-\hat{U}_1(p)}{R_1}+\dfrac{\hat{E}_1(p)-\hat{U}_1(p)}{\dfrac{1}{pC_1}}=\dfrac{\hat{U}_1(p)-\left(\hat{E}_2(p)+\hat{U}_{R_2}(p)\right)}{\dfrac{1}{pC_2}} \quad (1)\\ \dfrac{\hat{U}_1(p)-\left(\hat{E}_2(p)+\hat{U}_{R_2}(p)\right)}{\dfrac{1}{pC_2}}=\dfrac{\hat{U}_{R_2}(p)}{R_2} \quad (2)\end{cases}$$

Решением системы относительно $\hat{U}_{R_2}(p)$ будет (См [5], стр. 32-33):

$$\hat{U}_{R_2}(p) = \hat{E}(p)\frac{p\tau_2}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+pR_1C_2} + \hat{E}_1(p)\frac{p^2\tau_1\tau_2}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+pR_1C_2} -$$

$$-\hat{E}_2(p)\frac{p\tau_2(1+p\tau_1)}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+pR_1C_2};\ \textit{где}\ \tau_1 = R_1C_1;\ \tau_2 = R_2C_2$$

Если на конденсаторах в нулевой момент времени напряжения не будет, т.е. начальные условия нулевые, то $\hat{E}_1(p) = \hat{E}_2(p) = 0$ и уравнение примет вид:

$$\hat{U}_{R_2}(p) = \hat{E}(p)\frac{p\tau_2}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+pR_1C_2}$$, тогда

$$\frac{\hat{U}_{R_2}(p)}{\hat{E}(p)} = \frac{p\tau_2}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)+pR_1C_2} = K(p)$$ - передаточная функция цепи.

Передаточной функцией K(p) линейной цепи называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению по Лапласу входного сигнала, заданного в общем виде. Под выходным сигналом понимается сигнал на выходных клеммах четырёхполюсника. (в данном примере напряжение на резисторе R_2). Под входным сигналом понимается функция, описывающая ЭДС источника напряжения, подключённого к входным клеммам (в данном примере $e(t)$). Передаточная функция определяется по схеме замещения цепи при нулевых начальных условиях. Она (то есть отношение двух изображений по Лапласу) зависит только от принципиальной схемы цепи. Если начальные условия нулевые и передаточная функция четырёхполюсника известна, то изображение по Лапласу выходного сигнала можно найти по формуле $\hat{U}_{R_2}(p) = \hat{E}(p)K(p)$.

2. Определение передаточной функции цепи.

1 способ:

По схеме замещения цепи при нулевых начальных условиях (см. предыдущий пример).

2 способ:

По КЧХ цепи.

Если известна КЧХ линейной цепи, то для получения передаточной функции достаточно в КЧХ заменить $j\omega$ на p.

Эти способы отображены на схеме (см. рис. 9.6).

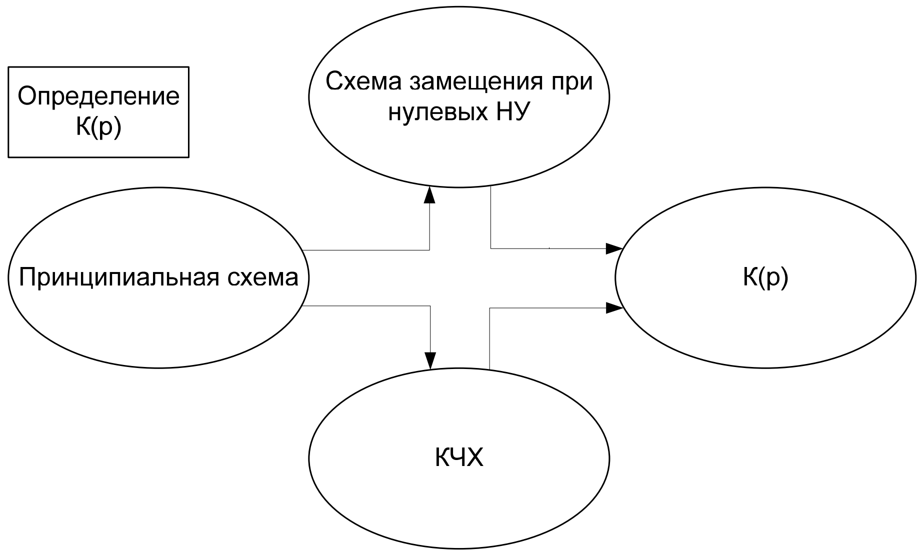

Рис. 9.6

Пример. Найдите передаточную функцию RC цепи (рис.9.7) по ее

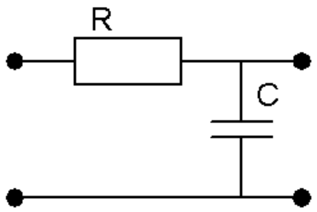

Рис.9.7

комплексно-частотной характеристике.

Решение.

КЧХ заданной цепи: $K(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega\tau_0}\,;\tau_0=RC$. Передаточную функцию получим, заменив $j\omega$ на ρ. Тогда $K(p)=\dfrac{1}{p\tau_0+1}$.

На самостоятельную проработку:

Найдите передаточную функцию последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой (см. рис. 9.8).

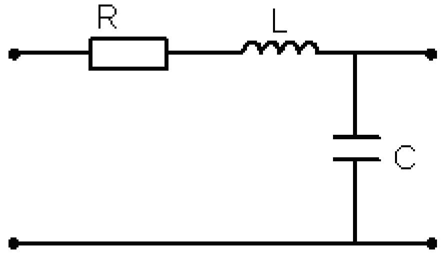

Рис.9.8

3. Алгоритм анализа переходных процессов с помощью преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Алгоритм можно представить в виде схемы

$$e(t) \xrightarrow{1} \hat{E}(p) \xrightarrow{2} \hat{U}_{вых}(p) = \hat{E}(p)K(p) \xrightarrow{3} U_{вых}(t)$$

То есть задача анализа переходного процесса решается за три шага:

1. шаг: Вычислить прямое преобразование Лапласа от входного воздействия.

2. шаг: По принципиальной схеме найти передаточную функцию цепи. Умножить на эту передаточную функцию изображения по Лапласу входного процесса и найти изображение по Лапласу выходного процесса.

3. шаг: Определение выходного сигнала с помощью обратного преобразования Лапласа.

Контрольные вопросы к лекции №9

1. Для чего составляется операторное уравнение цепи?
2. На что заменяется резистор в схеме замещения при ненулевых начальных условиях?
3. На что заменяется резистор в схеме замещения при нулевых начальных условиях?
4. На что заменяется конденсатор в схеме замещения при ненулевых начальных условиях?
5. На что заменяется конденсатор в схеме замещения при нулевых начальных условиях?
6. На что заменяется индуктивность в схеме замещения при ненулевых начальных условиях?
7. На что заменяется индуктивность в схеме замещения при нулевых начальных условиях?
8. Дайте определение передаточной функции цепи.
9. Назовите два способа определения передаточной функции цепи.
10. Изобразите схему анализа переходных процессов с помощью преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Типовые задачи к экзамену

1. Найдите передаточные функции RL и LR-цепей.
2. Найдите передаточную функцию последовательного колебательного контура с резистивной, емкостной и индуктивной нагрузкой.
3. Изобразите два варианта схемы замещения последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой, если $U_C(0) = U_0$, $I_L(0) = 0$
4. Изобразите два варианта схемы замещения последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой, если $U_C(0) = 0$, $I_L(0) = I_0$.