<u>Лекция № 7.</u>

Резонансные цепи. ([2], стр. 19-29)

<u>1. Последовательный колебательный контур.</u>

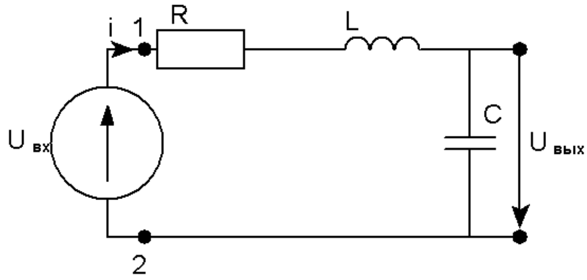


Рис. 7.1

Определим КЧХ, АЧХ, ФЧХ последовательного колебательного контура, схема которого приведена на рисунке 7.1.

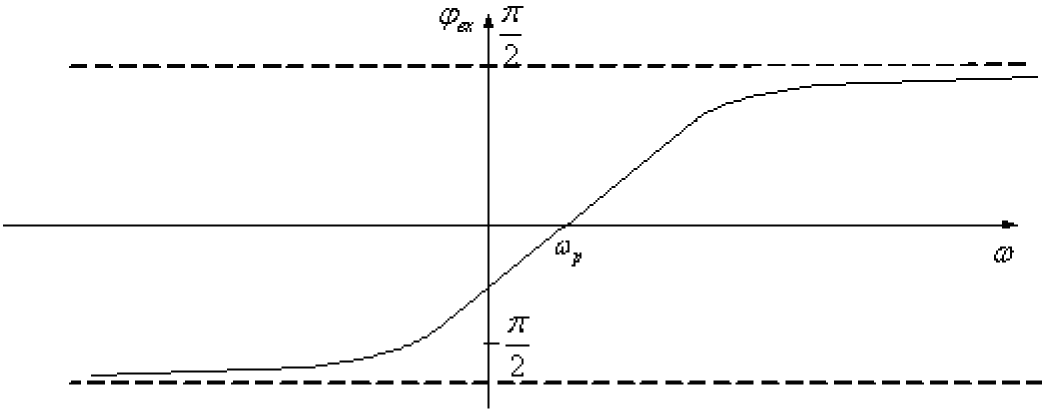
$$K(j\omega)=\frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}=\frac{\dot{I}Z_{вых}}{\dot{I}Z_{вх}}=\frac{\dot{Z}_{вых}}{\dot{Z}_{вх}}=\frac{\left|\dot{Z}_{вых}\right|e^{j\varphi_{вых}}}{\left|\dot{Z}_{вх}\right|e^{j\varphi_{вх}}}=\left|\frac{\dot{Z}_{вых}}{\dot{Z}_{вх}}\right|e^{j(\varphi_{вых}-\varphi_{вх})}$$

$$АЧХ=\left|K(j\omega)\right|=\left|\frac{\dot{Z}_{вых}}{\dot{Z}_{вх}}\right| \qquad ФЧХ=argK(j\omega)=\varphi_{вых}-\varphi_{вх}$$

$$\dot{Z}_{вх}=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=R+j\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}\right)$$

$$\left|\dot{Z}_{вх}\right|=\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}\right)^2}=\left|\frac{1}{\omega C}\right|\sqrt{(\omega CR)^2+\left(\omega^2 LC-1\right)^2}$$

$$\varphi_{вх}=arctg\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}$$



$\omega_p=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - резонансная частота – частота, на которой входное сопротивление $\dot{Z}_{вх}=R$, т.е. на этой частоте индуктивное и емкостное сопротивления равны по модулю и противоположны по знаку, и, следовательно, компенсируют друг друга. Кроме того, напряжения, выделяемые на индукции и емкости, так же равны друг другу по модулю и противоположны по знаку. Говорят, что в этом случае в контуре происходит резонанс напряжений, то есть суммарное падение напряжения на индуктивности и емкости равно нулю.

2. Частотные характеристики последовательного колебательного контура

Рассмотрим различные варианты последовательного колебательного контура.

2.1. Контур с емкостной нагрузкой (рис.7.2)

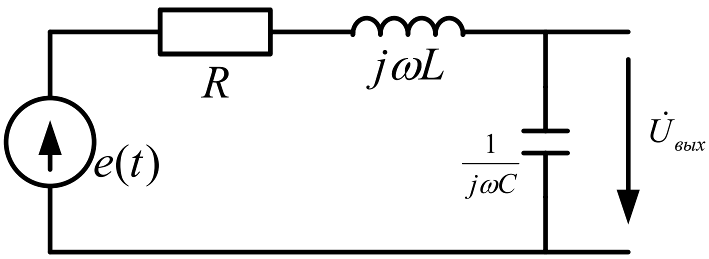


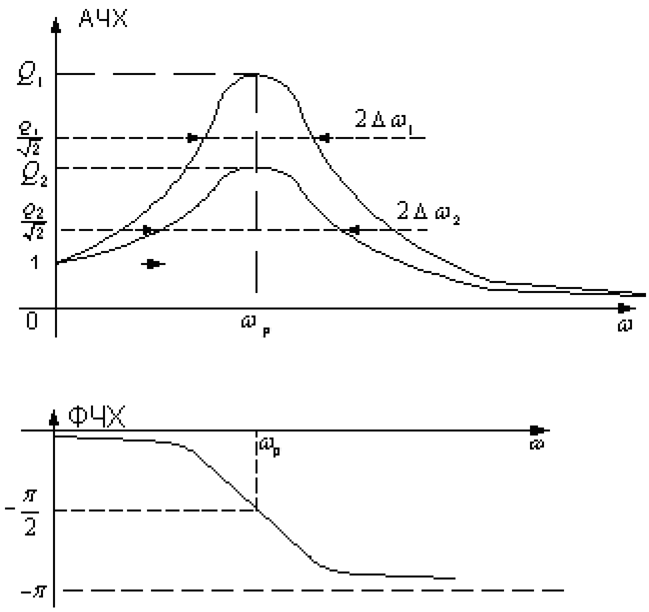
Рис.7.2

Найдем АЧХ и ФЧХ контура с емкостной нагрузкой (см. рис.7.2). Для этого определим модуль и аргумент емкостного сопротивления.

$\dot{Z}_{вых} = \dfrac{1}{j\omega C} = -\dfrac{j}{\omega C}$; $\quad \left|\dot{Z}_{вых}\right| = \dfrac{1}{|\omega C|}$; $\quad \varphi_{вых} = -\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$АЧХ = \frac{\left|\dot{Z}_{вых}\right|}{\left|\dot{Z}_{вх}\right|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \qquad ФЧХ = \varphi_{вых} - \varphi_{вх} = -\frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рисунке 7.3.



$$АЧХ(\omega_p) = \frac{1}{\omega_p RC} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

Q – Добротность контура

ρ - Характеристическое сопротивление контура

$$R_2 > R_1 \Rightarrow \begin{cases} Q_2 < Q_1 \\ 2\Delta\omega_2 > 2\Delta\omega_1 \end{cases}$$

Рис.7.3.

АЧХ имеет max на резонансной частоте, т.к. входное сопротивление минимально и равно R.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к бесконечности. С увеличением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, это объясняется тем, что емкость (конденсатор) закорачивает выходные клеммы с ростом частоты, поскольку емкостное сопротивление с ростом частоты уменьшается.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к нулю. При стремлении частоты к нулю значение АЧХ стремится к единице. Это можно объяснить так:

- сопротивление конденсатора при стремлении частоты к нулю стремится к бесконечности,
- тогда ток по цепи не течет,

- падение напряжения на элементах R и L равно нулю,
- следовательно, напряжения на входе и выходе одинаковы и их отношение равно единице.

Полосой пропускания линейной цепи называется диапазон частот, в котором АЧХ уменьшается не более, чем в $\sqrt{2}$ раза от своего максимального значения.
При увеличении R расширяется полоса пропускания последовательного колебательного контура. При высокой добротности полоса пропускания колебательного контура узкая, она пропускает частоты вблизи ω_p и контур называется полосно-пропускающим фильтром. С уменьшением добротности полоса пропускания контура расширяется при добротности близкой к 1, контур станет фильтром низких частот. Изменяя индуктивность или емкость можем изменить резонансную частоту и сместить max АЧХ вправо (L или C ↑) или влево (L или C ↓) и изменим диапазон частот, которые пропускает фильтр.

2.2. Контур с резистивной нагрузкой (рис.7.4)

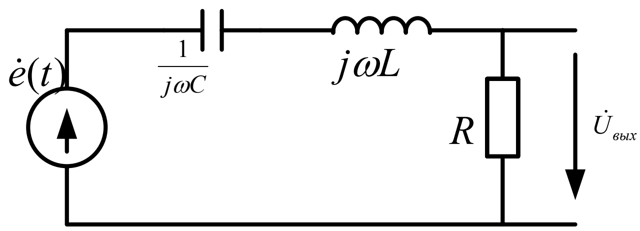


Рис.7.4.

Найдем АЧХ и ФЧХ контура с резистивной нагрузкой (см. рис.7.4). Для этого определим модуль и аргумент резистивного сопротивления.

$\dot{Z}_{вых} = R, \quad \left|\dot{Z}_{вых}\right| = R, \qquad \varphi_{вых} = 0$. Тогда

$$АЧХ = \frac{\left|\dot{Z}_{вых}\right|}{\left|\dot{Z}_{вх}\right|} = \frac{|R|}{\frac{1}{|\omega C|}\sqrt{R^2\omega^2C^2 + \left(\omega^2LC - 1\right)^2}} = \frac{|R||\omega C|}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + \left(\omega^2LC - 1\right)^2}}$$

$$АЧХ(\omega_p) = \frac{|R||\omega_p C|}{\sqrt{R^2\omega_p^2C^2 + \left(\omega_p^2LC - 1\right)^2}} = \frac{|R||\omega_p C|}{\sqrt{(R\omega_p C)^2}} = \frac{|R||\omega_p C|}{|R\omega_p C|} = 1$$

$$ФЧХ = \varphi_{вых} - \varphi_{вх} = 0 - arctg\frac{\omega^2LC - 1}{\omega CR} = -arctg\frac{\omega^2LC - 1}{\omega CR}$$

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рисунке 7.5.

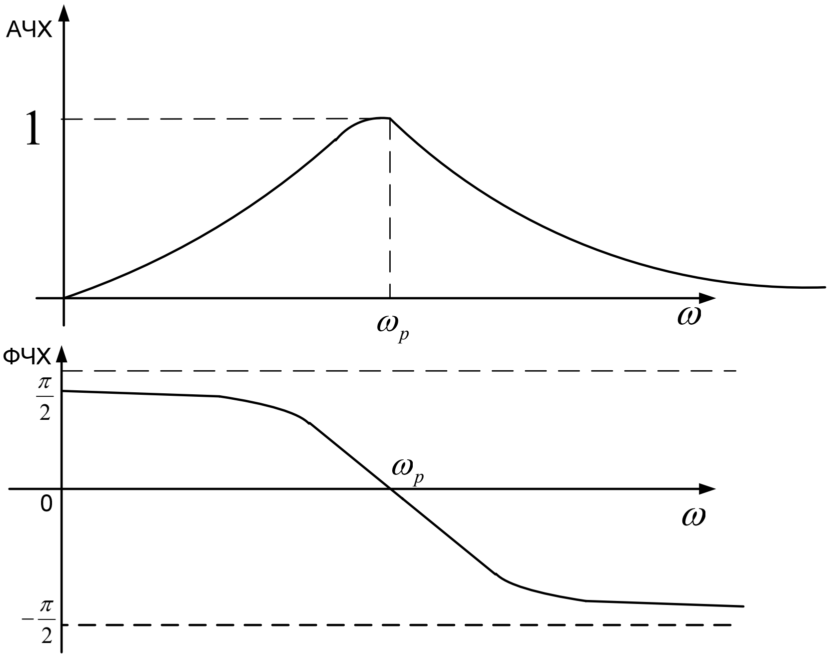


Рис.7.5

АЧХ имеет максимум на резонансной частоте, т.к. входное сопротивление минимально и равно R. При этом ток, протекающий по цепи, максимален и выходное напряжение также максимально.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к бесконечности. С увеличением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, т.к. индуктивное сопротивление с ростом частоты стремится к бесконечности, ток через цепь стремится к нулю и напряжение на резистивной нагрузке (на выходе) также стремится к нулю.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к нулю. С уменьшением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, т.к. емкостное сопротивление с ростом частоты стремится к бесконечности, ток через цепь опять стремится к нулю и напряжение на резистивной нагрузке (на выходе) также стремится к нулю.

2.3. Контур с индуктивной нагрузкой (рис. 7.6)

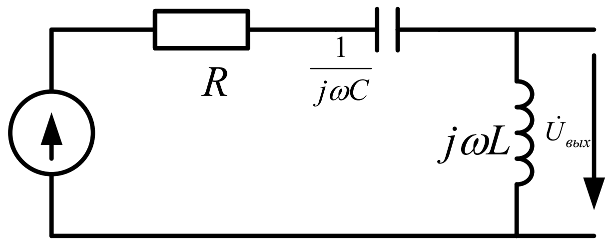


Рис.7.6.

Найдем АЧХ и ФЧХ контура с индуктивной нагрузкой (см. рис.7.6). Для этого определим модуль и аргумент индуктивного сопротивления.

$$\dot{Z}_{вых} = j\omega L, \quad \left|\dot{Z}_{вых}\right| = \left|\omega L\right|, \qquad \varphi_{вых} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда

$$АЧХ = \frac{\left|\dot{Z}_{вых}\right|}{\left|\dot{Z}_{вх}\right|} = \frac{\left|\omega L\right|\left|\omega C\right|}{\sqrt{(R\omega C)^2 + \left(\omega^2 LC - 1\right)^2}}$$

$$ФЧХ = \varphi_{вых} - \varphi_{вх} = \frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$

$$АЧХ(\omega_p) = \frac{\left|\omega_p^2 LC\right|}{\sqrt{(R\omega_p C)^2}} = \frac{1}{\left|R\omega_p C\right|} = \frac{\rho}{R} = Q$$

Графики АЧХ и ФЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой приведены на рисунке 7.7.

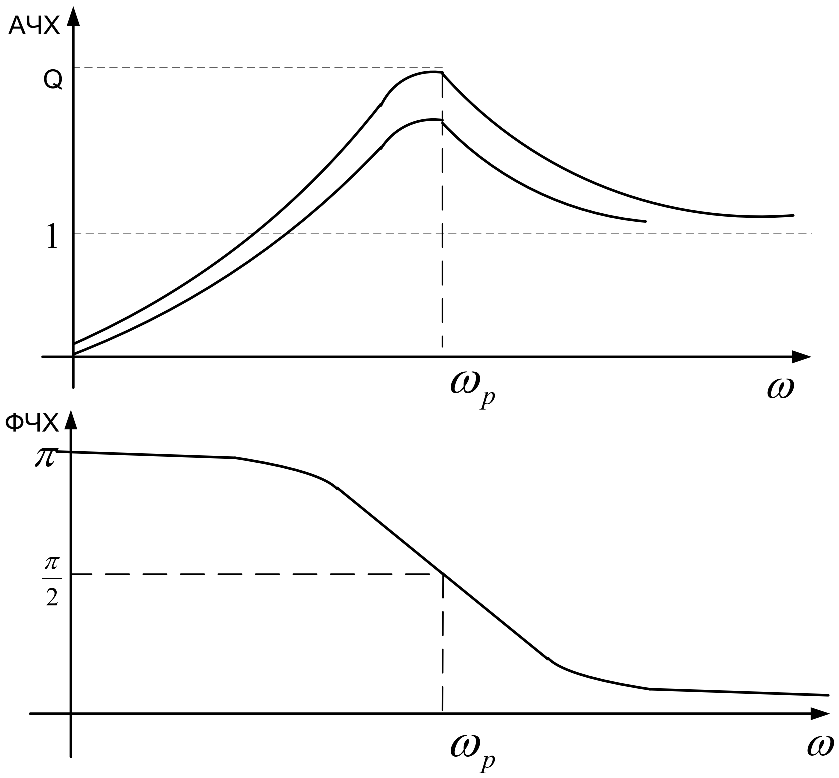


Рис.7.7.

АЧХ имеет максимум на резонансной частоте, т.к. входное сопротивление минимально и равно R. При этом ток, протекающий по цепи, максимален и выходное напряжение также максимально.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к нулю. С уменьшением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, это объясняется тем, что катушка индуктивности закорачивает выходные клеммы с уменьшением частоты, поскольку индуктивное сопротивление с уменьшением частоты уменьшается.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к бесконечности. При стремлении частоты к бесконечности значение АЧХ стремится к единице. Это можно объяснить так:

- сопротивление индуктивности при стремлении частоты к бесконечности стремится к бесконечности,
- тогда ток по цепи не течет,
- падение напряжения на элементах R и C равно нулю,
- следовательно, напряжения на входе и выходе одинаковы и их отношение равно единице.

3. Параллельный колебательный контур (рис.7.8).

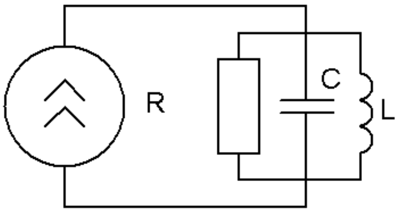


Рис. 7.8

На рисунке 7.8 изображена схема параллельного колебательного контура. Найдем КЧХ, АЧХ и ФЧХ этой цепи. В параллельном колебательном контуре КЧХ определяется как отношение комплексной амплитуды гармонического напряжения на контуре к комплексной амплитуде гармонического тока, протекающего через контур в зависимости от частоты гармоники. Тогда

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{ВЫХ}}{\dot{I}} = \dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}}$$

$$\dot{U}_{ВЫХ} = K(j\omega)\dot{I} = \dot{I}\dot{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{Y}}$$

Где $\dot{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

Преобразуем проводимость контура.

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + j\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}\left(\omega C\sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\omega L}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_P} - \frac{\omega_P}{\omega}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\frac{(\omega - \omega_p)(\omega + \omega_p)}{\omega_p \omega}\right)\right)$$

$$\left[Q = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}};\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho;\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right]$$

ω_P - резонансная частота;

ρ – характеристическое сопротивление контура;

Q – добротность;

$\Delta\omega = \omega - \omega_P$ - абсолютная расстройка;

При $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ $\quad \dot{Y} = \frac{1}{R}$ индуктивная и емкостная проводимость компенсируют друг друга и в контуре наступает резонанс токов. При этом токи, протекающие через L и C, компенсируют друг друга, так как равны по модулю и противоположны по знаку. Сам контур при этом обладает минимальной проводимостью и максимальным сопротивлением.

При малых расстройках $\Delta\omega \quad \omega \approx \omega_p$. Тогда:

$$\dot{Y} \approx \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\frac{\Delta\omega \cdot 2\omega_p}{\omega_p^2}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}\right)$$

$$K(j\omega) = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{R}{1 + jQ\dfrac{2\Delta\omega}{\omega_P}}$$

$$\text{АЧХ} = |K(j\omega)| = \left| \frac{R}{\sqrt{1 + \left(Q\dfrac{2\Delta\omega}{\omega_P}\right)^2}} \right|$$

$$\text{ФЧХ} = \arg K(j\omega) = 0 - arctg\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_P}\right)$$

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис.7.9 и 7.10

.

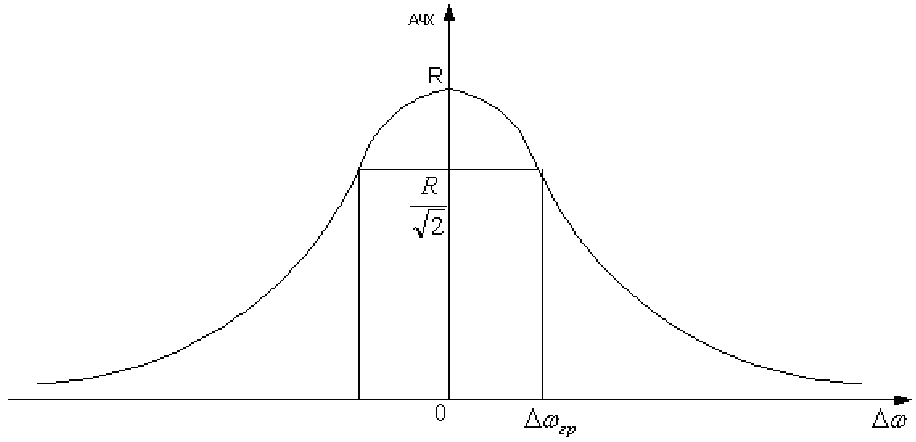


Рис. 7.9

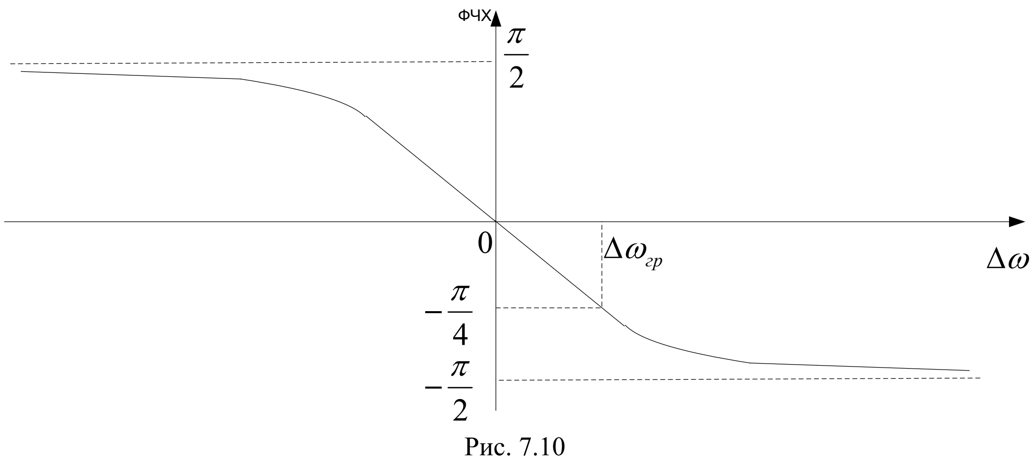


Рис. 7.10

$$Q\frac{2\Delta\omega_{ГР}}{\omega_P} = 1$$

$$\Delta\omega_{ГР} = \frac{\omega_P}{2Q}; \Delta\omega_{ГР} = \frac{1}{2RC}$$

- На резонансной частоте АЧХ имеет max R, т.к. этой частоте происходит резонанс токов, когда индуктивная и емкостная проводимости компенсируют друг друга, поскольку равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, сопротивление нагрузки на резонансной частоте становится максимальным и равным *R*.

- С увеличением расстройки $\Delta\omega$, то есть при $\omega > \omega_p$ АЧХ падает, потому что с ростом частоты уменьшается емкостное сопротивление, которое закорачивает выходные клеммы. С уменьшением частоты ω относительно ω_P, то есть при отрицательных расстройках, АЧХ также уменьшается, потому что с уменьшением частоты уменьшается индуктивное сопротивление, которое закорачивает выходные клеммы.

  Рабочий диапазон частоты: $\left[-\Delta\omega_{ГР};\Delta\omega_{ГР}\right]$ называется полосой пропускания.

- ✓ Для изменения ω_P можно изменять индуктивность и емкость, но емкость удобнее (пластинки вращать удобнее, чем изменять число витков). Для увеличения полосы пропускания надо уменьшить *R*.

Контрольные вопросы к лекции №7

1. Что называется резонансом напряжений и когда он возникает?
2. Почему АЧХ последовательного колебательного контура имеет максимум на резонансной частоте?
3. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой стремится к нулю при стремлении частоты к бесконечности?
4. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой стремится к единице при стремлении частоты к нулю?
5. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой стремится к единице при стремлении частоты к бесконечности?
6. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой стремится к нулю при стремлении частоты к нулю?
7. Что нужно изменить в последовательном колебательном контуре для увеличения его добротности?
8. Что называется резонансом токов и когда он возникает?
9. Почему АЧХ параллельного колебательного контура имеет максимум на резонансной частоте?
10. Как увеличить полосу пропускания параллельного колебательного контура?

Типовые задачи к экзамену

1. Определите комплексно-частотную, амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики последовательного колебательного контура, когда выходное напряжение снимается с емкости и изобразите друг под другом АЧХ и ФЧХ контура, если $R = 500$ [Ом] $C = \frac{10^{-8}}{2\pi}$ [ф], $L = \frac{10^{-2}}{2\pi}$ [Гн]

2. Определите комплексно-частотную, амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики последовательного колебательного контура, когда выходное напряжение снимается с индуктивности и изобразите друг под другом АЧХ и ФЧХ контура, если $R = 250$ [Ом] $C = \frac{10^{-8}}{2\pi}$ [ф], $L = \frac{10^{-2}}{2\pi}$ [Гн]

3. Определите комплексно-частотную, амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики параллельного колебательного контура и изобразите друг под другом АЧХ и ФЧХ контура, если

$$R = 250 \text{ [Ом] } C = \frac{10^{-8}}{2\pi} \text{ [ф]}, L = \frac{10^{-2}}{2\pi} \text{ [Гн]}.$$