Лекция № 6.

Методы анализа сложных линейных цепей.

Существуют универсальные методы, позволяющие автоматически описывать связь между током и напряжением на различных участках цепи.

Эти методы позволяют сократить число уравнений, связывающих между собой токи и напряжения, и используются для определения I и U на резистивных и комплексных сопротивлениях.

Существует 3 основных метода:

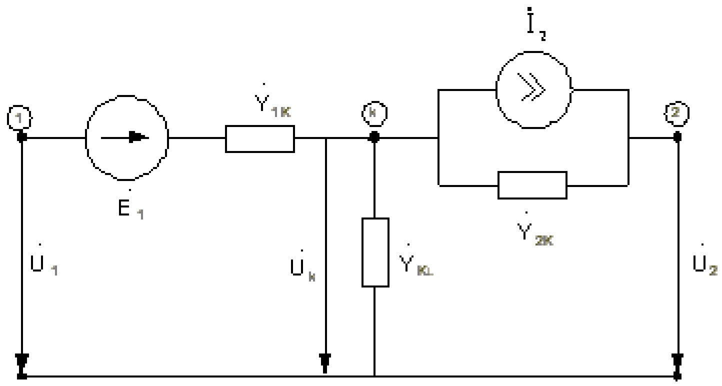
1. Метод узловых потенциалов
2. Метод контурных токов
3. Метод переменных состояний

Эти методы различаются выбором неизвестных при составлении уравнений (Литература [1])

1.Метод узловых потенциалов (напряжений). Лит.[1] с.37-41

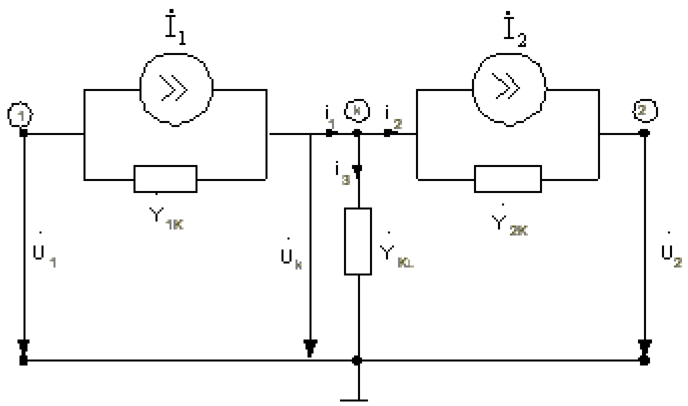
- ✓ Применяется для анализа линейных цепей, в которых действуют либо постоянные токи и напряжения, либо гармонические. При этом используются законы Ома и Кирхгофа.

Рассмотрим фрагмент схемы, содержащей источники тока и ЭДС, где $\dot{Y}$ - комплексные проводимости.



Заменим источник ЭДС на эквивалентный источник тока.

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 \cdot \dot{Y}_{1k}$$



Используя закон Кирхгофа для узла, составим систему уравнений

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 = \dot{I}_1 + \left(\dot{U}_1 - \dot{U}_K\right)\dot{Y}_{1K} \\ i_2 = \dot{U}_K \cdot \dot{Y}_{K\perp} \\ i_3 = \dot{I}_2 + \left(\dot{U}_K - \dot{U}_2\right)\dot{Y}_{2K} \end{cases}$$

Подставив второе, третье и четвертое уравнения системы в первое уравнение, получим

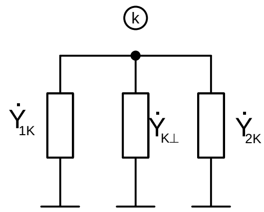
$$-\dot{I}_1 - \left(\dot{U}_1 - \dot{U}_K\right)\dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K\dot{Y}_{K\perp} + \dot{I}_2 + \left(\dot{U}_K - \dot{U}_2\right)Y_{2K} = 0$$

$$-\dot{U}_1\dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K\dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K\dot{Y}_{K1} + \dot{U}_K\dot{Y}_{2K} - \dot{U}_2Y_{2K} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

$$-\dot{U}_1\dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K(\dot{Y}_{1K} + \dot{Y}_{K1} + \dot{Y}_{2K}) - \dot{U}_2Y_{2K} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

$$-\dot{U}_1\dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K\dot{Y}_{KK} - \dot{U}_2\dot{Y}_{2K} = I^{(K)}$$

Где $\dot{Y}_{kk} = \dot{Y}_{1K} + \dot{Y}_{K\perp} + \dot{Y}_{2K}$



$\dot{Y}_{KK}$ - узловая проводимость k – того узла, $\dot{I}_K = I_1 - I_2$ - ток К-го узла. Узловые проводимости $\dot{Y}_{KK}$ определяются следующим образом: заземляются противоположные концы ветвей, подходящих к данному узлу (см. рис.) и определяется суммарная проводимость поученной цепи. При этом источники токов разрываются.

- ✓ Уравнение $-\dot{U}_1\dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K\dot{Y}_{KK} - \dot{U}_2\dot{Y}_{2K} = I^{(K)}$ представляет собой типичное уравнение для k – го узла в методе узловых напряжений. Под узлом здесь понимают узел, в котором сходится не менее трех ветвей.

Заметим, что в левую часть уравнения со знаком “+” входит слагаемое для потенциала К-го узла, а со знаком “-“ все остальные слагаемые. Если в схеме всего n – узлов, то получим систему из n – уравнений, с n – неизвестными, которыми будут узловые напряжения $\dot{U}_K$.
Приведем пример системы из 4 – х уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U}_1\dot{Y}_{11} - \dot{U}_2\dot{Y}_{12} - \dot{U}_3\dot{Y}_{13} - \dot{U}_4\dot{Y}_{14} = \dot{I}^{(1)} \\ -\dot{U}_1\dot{Y}_{21} + \dot{U}_2\dot{Y}_{22} - \dot{U}_3\dot{Y}_{23} - \dot{U}_4Y_{24} = \dot{I}^{(2)} \\ \vdots \\ -\dot{U}_1\dot{Y}_{41} - \dot{U}_2\dot{Y}_{42} - \dot{U}_3\dot{Y}_{43} - \dot{U}_4\dot{Y}_{44} = \dot{I}^{(4)} \end{cases} \quad (6.1)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \;\ldots - Y_{14} \\ -Y_{21} \ldots - Y_{24} \\ \vdots \\ -Y_{41} \ldots \; Y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{I}^{(1)} \\ \dot{I}^{(2)} \\ \vdots \\ \dot{I}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

- ✓ Метод узловых потенциалов (напряжений) позволяет определить по заданной схеме напряжение (разность потенциалов) узлов схемы относительно базового узла, который обычно заземлен (т.е. его потенциал равен нулю).

Для определения узловых потенциалов следует:

1) Выбрать базовый узел и заземлить его.

   а) Если требуется найти токи и напряжения на всех элементах схемы, то за базовый узел удобно выбрать узел, в котором сходится наибольшее число ветвей.

б) Если требуется найти напряжение на одном двухполюснике, то за базовый узел удобно выбрать один из полюсов этого двухполюсника.

2) Заменить источники напряжения в заданной схеме на эквивалентные источники тока и, записав токи, подтекающие к узлу со знаком "+" и оттекающие со знаком " -", найти узловые токи.

3) Найти межузловые проводимости ветвей, соединяющих незаземленные узлы.

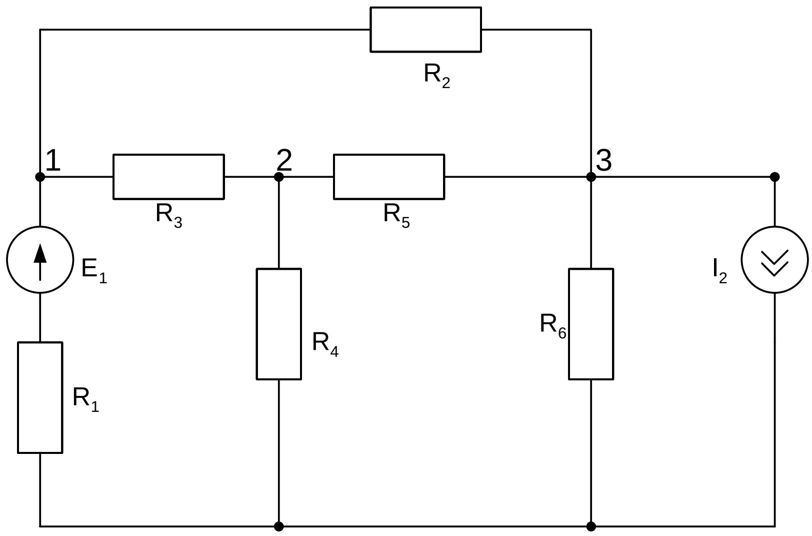
$\dot{Y}_{mp} = \dot{Y}_{pm}, p \neq m$, если узлы m и p не имеют ветвей между собой, то $\dot{Y}_{mp} = 0$

4) Найти узловые проводимости $\dot{Y}_{KK}$, заземлив противоположные концы ветвей, подходящих к данному узлу. При этом источники токов разрываются.

5) Записать систему уравнений в форме (6.1) или (6.2).

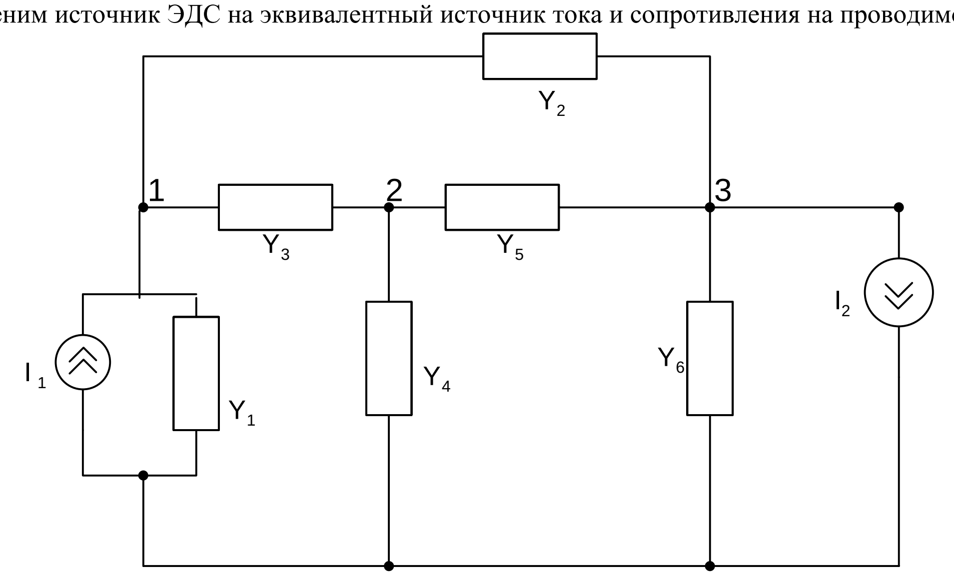
Пример:

Для заданной схемы составить систему уравнений, используя метод узловых напряжений.



1) В качестве базового выберем узел, в котором сходятся $R_1; R_4; R_6$ *и* I_2 и заземлим его.

2) Заменим источник ЭДС на эквивалентный источник тока и сопротивления на проводимости.



$$I_1 = E_1 Y_1$$

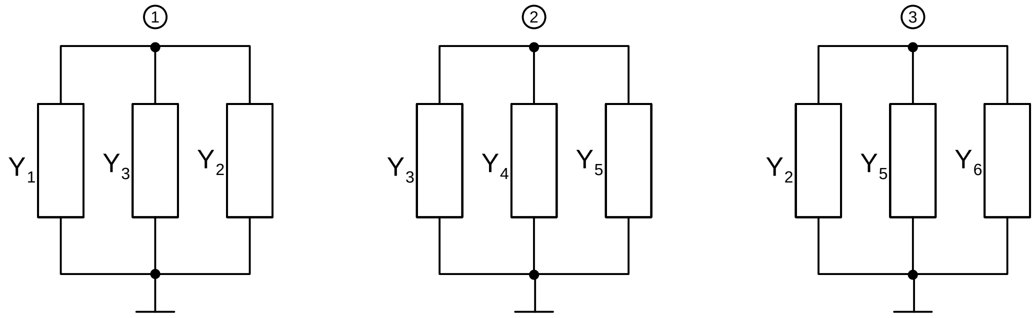
$$Y_K = \frac{1}{R_K}$$

3) Найдем межузловые проводимости Y_{mp}

$$Y_{12} = Y_3 = \frac{1}{R_3}; Y_{21} = Y_{12}; Y_{13} = Y_2 = \frac{1}{R_2}; Y_{31} = Y_{13}$$

$$Y_{23} = Y_5 = \frac{1}{R_5}; Y_{32} = Y_{23}$$

4) Найдем узловые проводимости Y_{KK}



$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$Y_{22} = Y_3 + Y_4 + Y_5 = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

$$Y_{33} = Y_2 + Y_5 + Y_6 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

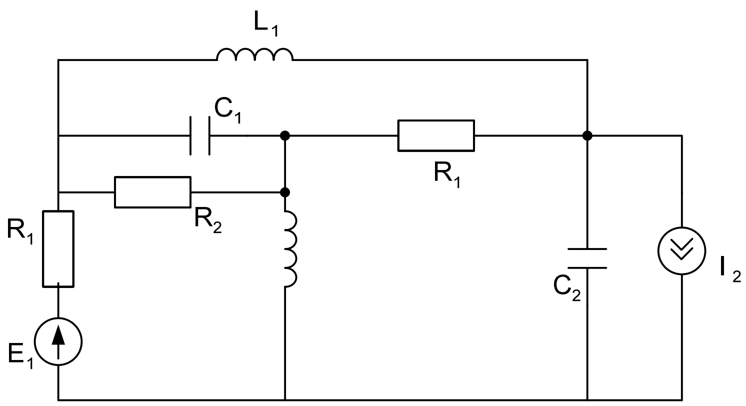
5) Составим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} U_1 Y_{11} - U_2 Y_{12} - U_3 Y_{13} = I_1 \\ -U_1 Y_{21} + U_2 Y_{22} - U_3 Y_{23} = 0 \\ -U_1 Y_{31} - U_2 Y_{32} + U_3 Y_{33} = -I_2 \end{cases}$$

Если бы $R_1 = 0$, то есть вместо него была перемычка, то узел (1) из системы уравнений выпал бы, т.к. $U_1 = E_1$. Тогда система состояла бы из двух уравнений.

Пример на самостоятельную проработку:

Используя метод узловых потенциалов, составьте систему уравнений для заданной схемы.



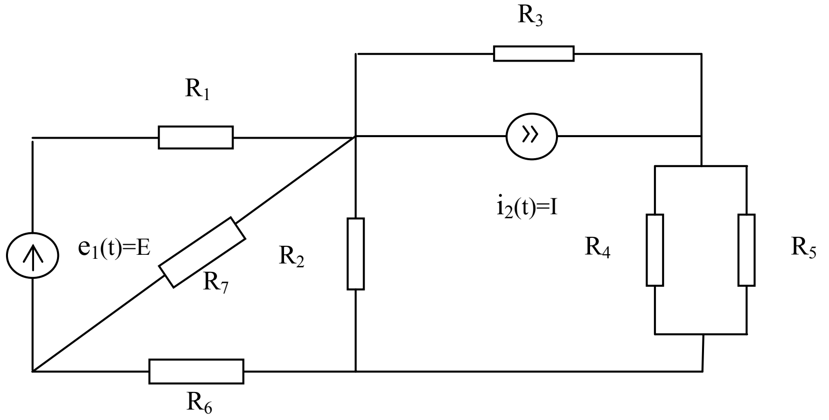
Контрольные вопросы к лекции №6

1. Перечислите основные методы анализа линейных цепей.
2. Сформулируйте суть метода узловых потенциалов.
3. Из каких соображений выбирается базовый узел в методе узловых потенциалов?
4. В каком случае межузловая проводимость равна нулю?
5. Как определяется узловая проводимость?
6. Как определяется узловой ток?

7. Запишите типичное уравнения для к-го узла в методе узловых потенциалов.
8. От чего зависит количество уравнений, входящих в систему, из которой определяются узловые потенциалы?
9. Какой узел вы выбрали бы в качестве базового, в схеме примера, заданного для самостоятельной проработки, если бы нужно было найти напряжение на катушке L_1?

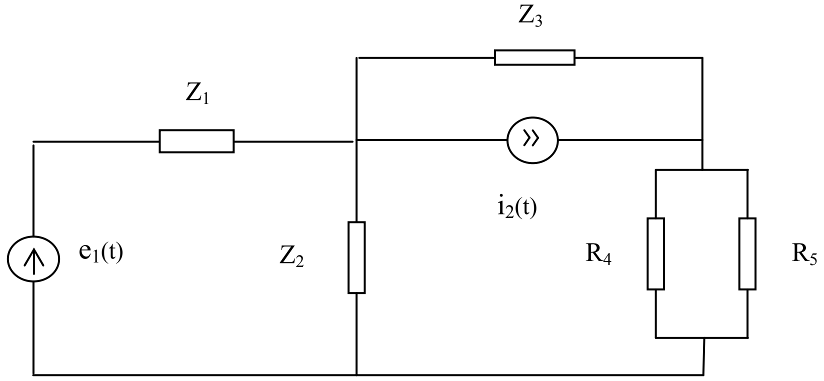
<u>Типовые задачи к экзамену</u>

1. Используя метод узловых напряжений, определите напряжение, на элементе R_2 в схеме, изображенной на рисунке, если $e_1(t)=E$, $E=3В$; $i_2(t)=I$, $I=2mA$;



$R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=R_7=1кОм$.

2. Используя метод узловых напряжений, определите напряжение, на элементе Z_2 в схеме,



изображенной на рисунке, если $e_1(t)=E\cos(\omega_0 t)$, $E=1В$, $i_2(t)= I\cos\omega_0 t$, $I=2mA$; $\omega_0=2\pi\cdot 10^4$
$Z_1=Z_3=R=1кОм$, $Z_2=1/(j\omega_0 C)$, $C=10^{-7}/(2\pi)Ф$, $Z_4=Z_5=2R=2кОм$.