<u>Лекция № 4.</u>

([2] стр. 3-19)

Метод комплексных амплитуд.

<u>1.Комплексные числа.</u>

Комплексное число $\dot{Z} = x + jy$ (см. рис. 4.1) графически отображается на комплексной плоскости в

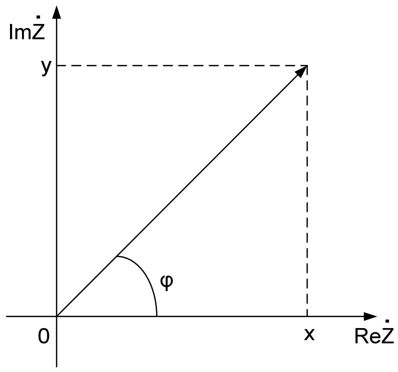


Рис. 4.1

виде вектора, где $Re(\dot{Z}) = x, \quad Im(\dot{Z}) = y$.

Формула $\dot{Z} = x + jy$ (4.1) называется алгебраической формой комплексного числа. Введем еще два параметра комплексного числа

$\left|\dot{Z}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль, длина вектора.

$\arg \dot{Z} = \varphi = arctg\dfrac{y}{x}$ - аргумент, угол между вектором и положительным направлением действительной оси

$$x = \left|\dot{Z}\right|\cos\varphi$$

$$y = \left|\dot{Z}\right|\sin\varphi$$

$$\dot{Z} = \left|\dot{Z}\right|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \left|Z\right|e^{j\varphi} \quad (4.2)$$

Формула (4.1) удобна при сложении и вычитании комплексных чисел, а формула (4.2) - при умножении и делении.

- Сложение и вычитание комплексных чисел:

$$\begin{cases} \dot{Z} = \dot{Z}_1 \pm \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_1 = x_1 + iy_1 \\ \dot{Z}_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \Rightarrow \dot{Z} = \dot{Z}_1 \pm \dot{Z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

- Умножение комплексных чисел:

$$\begin{cases} \dot{Z} = \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_1 = \left|\dot{Z}_1\right|e^{j\varphi_1} \\ \dot{Z}_2 = \left|\dot{Z}_2\right|e^{j\varphi_2} \end{cases} \Rightarrow \dot{Z} = \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = \left|\dot{Z}_1\right|e^{j\varphi_1}\left|\dot{Z}_2\right|e^{j\varphi_2} = \left|\dot{Z}_1\right|\left|\dot{Z}_2\right|e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = \left|\dot{Z}\right|e^{j\varphi},$$

где $где \left|\dot{Z}\right| = \left|\dot{Z}_1\right|\left|\dot{Z}_2\right|, \varphi \ = \varphi_1 + \varphi_2$

- Деление комплексных чисел:

$$\begin{cases} \dot{Z} = \dfrac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} \\ \dot{Z}_1 = \left|\dot{Z}_1\right| e^{j\varphi_1} \\ \dot{Z}_2 = \left|\dot{Z}_2\right| e^{j\varphi_2} \end{cases} \Rightarrow \dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{\left|\dot{Z}_1\right| e^{j\varphi_1}}{\left|\dot{Z}_2\right| e^{j\varphi}} = \frac{\left|\dot{Z}_1\right|}{\left|\dot{Z}_2\right|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \left|\dot{Z}\right| e^{j\varphi},$$

где $\left|\dot{Z}\right| = \dfrac{\left|\dot{Z}_1\right|}{\left|\dot{Z}_2\right|}$.

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

<u>2. Комплексный сигнал. Комплексная амплитуда.</u>

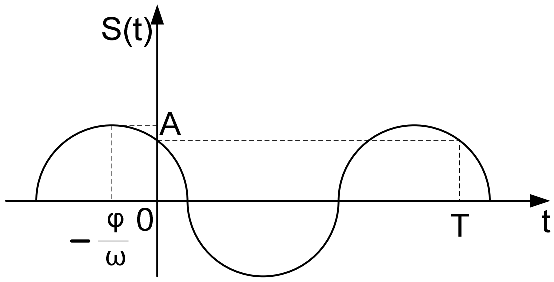


Рис. 4.2

- ✓ Реальный гармонический сигнал (рис. 4.2): $S(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
- ✓ Комплексный гармонический сигнал можно изобразить в виде подвижного вектора на комплексной плоскости (рис 4.3):

  $\dot{S}(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + jA\sin(\omega t + \varphi) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} = \dot{A}e^{j\omega t}$

  Тогда $S(t) = \mathrm{Re}\{\dot{S}(t)\}$

  $\dot{A} = Ae^{j\varphi}$ - комплексная амплитуда гармонического сигнала.

- ♦ Комплексная амплитуда – число, включающее в себя информацию об амплитуде A и начальной фазе φ гармонического сигнала.

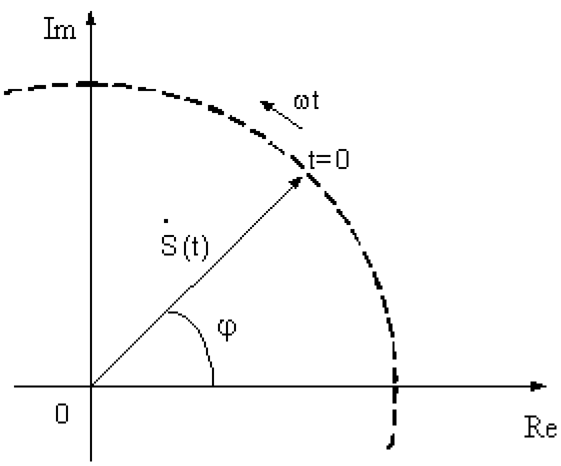


Рис.4.3.

(Re – реальная часть. Im – мнимая часть, ωt - угол поворота, A – длинна вектора, $\varphi -$ начальная фаза - угол, определяющий положение вектора при t=0)

3. Комплексное сопротивление и проводимость.

Вспомним связь между током и напряжением на элементах L, R и C.

$$U_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt};$$
$$i_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt};$$
$$U_R(t) = Ri(t);$$

- ✓ Введем комплексные токи и напряжения.

$\dot{U}(t) = \dot{U}e^{\omega t}$ - комплексное напряжение.

$\dot{I}(t) = \dot{I}e^{j\omega t}$ - комплексный ток.

$\left.\begin{aligned}\dot{U}_L(t) = \dot{U}_L e^{j\omega t}\\ \dot{I}_L(t) = \dot{I}_L e^{j\omega t}\end{aligned}\right\}$ - комплексный ток и напряжение на индуктивности.

$$\dot{U}_L(t) = \dot{I}_L j\omega L e^{j\omega t}$$

$$\dot{U}_L e^{j\omega t} = \dot{I}_L j\omega L e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{Z}_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L$$

- ✓ $\dot{Z}_L = j\omega L$ -комплексное индуктивное сопротивление. Индуктивное сопротивление пропорционально частоте гармонического сигнала.

$\left.\begin{aligned}\dot{U}_C(t) = \dot{U}_C e^{j\omega t}\\ \dot{I}_C(t) = \dot{I}_C(t) e^{j\omega t}\end{aligned}\right\}$ - комплексное напряжение и ток на емкости.

$$\dot{I}_C(t) = C\dot{U}_C j\omega e^{j\omega t}$$

$$\dot{I}_C e^{j\omega t} = C\dot{U}_C j\omega e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{Z}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{1}{j\omega c}$$

- ✓ $\dot{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega c}$ - комплексное емкостное сопротивление. Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте гармонического сигнала.
- Комплексное резистивное сопротивление:

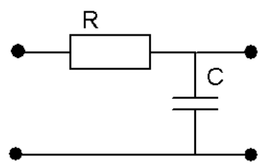
$$R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R}$$

- Комплексные проводимости:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} \qquad \dot{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} \qquad \dot{Y}_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad \dot{Y}_R = G = \frac{1}{R}$$

После введения комплексного гармонического сигнала комплексной амплитуды, сопротивления и проводимости можно распространить законы Ома и Кирхгофа с резистивных на индуктивные и емкостные цепи. При этом предполагается, что в цепях действуют гармонические сигналы.
Метод анализа линейных цепей, основанный на использовании комплексных амплитуд токов и напряжений, комплексных проводимостей и сопротивлений называют методом комплексных амплитуд.

Пример 1:
Определить комплексное сопротивление RC – цепи.



$$\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega CR + 1}{j\omega C}$$ - комплексное сопротивление.

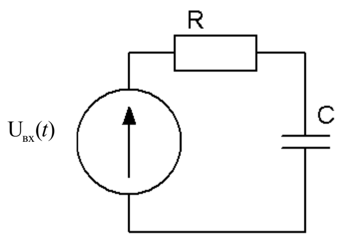
$$\left|\dot{Z}\right| = \frac{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}{\omega C}$$

$$\varphi_Z = arctg\omega CR - \frac{\pi}{2}$$

$$Z = \left|\dot{Z}\right| e^{j\varphi_z} = \frac{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}{\omega C} e^{jarctg\omega CR - \frac{\pi}{2}}$$

Пример 2:

Определить ток, протекающий через цепь, если входное напряжение: $U_{BX}(t) = U\,cos(\omega t + \varphi)$
$I(t) = ?$



1) Перейдем от реального напряжения к комплексному и выделим комплексную амплитуду напряжения.
$$U_{BX}(t) \Rightarrow \dot{U}_{BX}(t) = Ue^{j(\omega t + \varphi)}; \dot{U} = Ue^{j\varphi}$$
2) Найдем комплексную амплитуду тока, используем закон Ома для комплексных амплитуд.
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{Ue^{j\varphi}}{\left|\dot{Z}\right| e^{jU_Z}} = \frac{U}{\left|\dot{Z}\right|} e^{j(\varphi - \varphi_Z)}$$
3) Запишем комплексный ток $\dot{I}(t)$
$$\dot{I}(t) = \dot{I}e^{j\omega t} = Ie^{j\varphi_I} e^{j\omega t},$$
$$I = \frac{U}{\left|\dot{Z}\right|}; \varphi_I = \varphi - \varphi_Z$$
4) Возьмем действительную часть комплексного тока и найдем реальный ток, протекающий в цепи.
$$I(t) = \mathrm{Re}\{\dot{I}(t)\} = \mathrm{Re}\{Ie^{j(\varphi_I + \omega t)}\} = I\cos(\omega t + \varphi_I);$$
$$I = \frac{U}{\left|\dot{Z}\right|}; \varphi_I = \varphi - \varphi_Z$$

где (см. пр. 1) $\left|\dot{Z}\right| = \dfrac{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}{\omega C}$; $\varphi_Z = arctg\omega CR - \dfrac{\pi}{2}$

4. Комплексная частотная характеристика (КЧХ). Амплитудно – частотная характеристика (АЧХ). Фазо – частотная характеристика (ФЧХ) линейной цепи.

- КЧХ – зависимость отношения комплексной амплитуды гармонического сигнала на выходе цепи к комплексной амплитуде гармонического сигнала на входе цепи от частоты этих сигналов.

    - ✓ Это отношение может быть безразмерным и иметь размерность тока и напряжения. Чаще всего под комплексными амплитудами входного и выходного сигналов понимаются комплексные амплитуды напряжения, в этом случае КЧХ безразмерно.

- АЧХ – (с математической точки зрения) – это модуль КЧХ, а (с физической точки зрения) – это отношение амплитуды реального гармонического сигнала на выходе к амплитуде реального гармонического сигнала на входе, в зависимости от частоты этого сигнала.

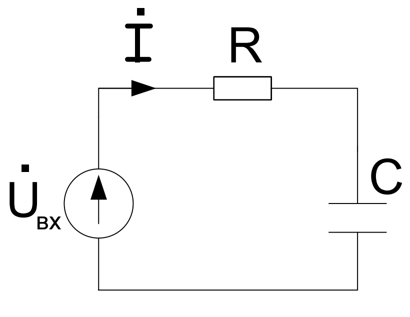
- ФЧХ – (с математической точки зрения) – это аргумент КЧХ, а (с физической точки зрения) – это разность начальных фаз между начальной фазой гармонического сигнала на выходе и начальной фазой гармонического сигнала на входе цепи, в зависимости от частоты этого сигнала.

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{S}_{ВЫХ}}{\dot{S}_{ВХ}}$$

$$АЧХ = \left|\dot{K}(j\omega)\right| = \frac{S_{ВЫХ}}{S_{ВХ}}$$

$$ФЧХ = \arg\dot{K}(j\omega) = \varphi_{ВЫХ} - \varphi_{ВХ}$$

<u>Пример</u>:
Определить АЧХ и ФЧХ для *RC* – цепочки.
Исходные данные:
$U_{ВХ}(t) = U_{ВХ}\cos(\omega t + \varphi_{ВХ})$, R, C.
АЧХ, ФЧХ - ?



1) $\dot{U}_{ВХ} = U_{ВХ}e^{j\varphi_{ВХ}}$

2) $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}_{ВХ}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \dfrac{j\omega C\dot{U}_{ВХ}}{1 + j\omega CR}$

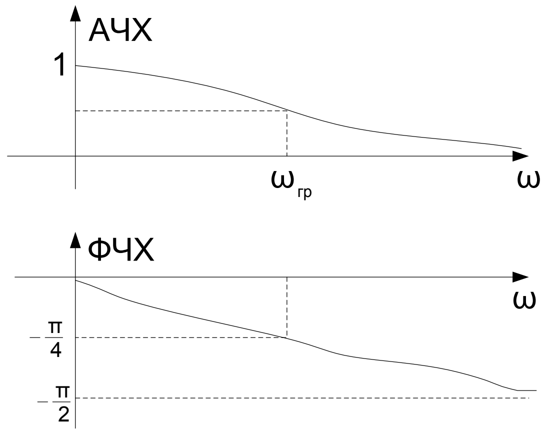
3) $\dot{U}_{ВЫХ} = \dot{I}\dot{Z}_C = \dfrac{j\omega C\dot{U}_{ВХ}}{1 + j\omega CR}\dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{\dot{U}_{ВХ}}{1 + j\omega CR}$

4) $\dot{K}(j\omega) = \dfrac{\dot{U}_{ВЫХ}}{\dot{U}_{ВХ}} = \dfrac{1}{1 + j\omega CR} = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau_0}; \tau_0 = RC$

5) $АЧХ = \left|\dot{K}(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau_0)^2}}$

6) $ФЧХ = arctgK(j\omega) = 0 - arctg\omega\tau_0\omega CR = -arctgw\tau_0;$
$\tau_0 = RC$

Построим график



При $\omega = \omega_{гр} = \dfrac{1}{CR}$ значение АЧХ равно $1/\sqrt{2}$, а значение ФЧХ $-\dfrac{\pi}{4}$.

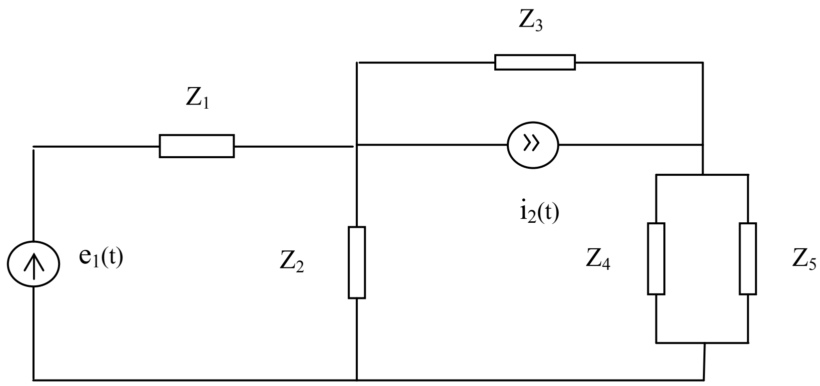
Контрольные вопросы к лекции №4

1. В чем геометрический смысл модуля комплексного числа?
2. В чем геометрический смысл аргумента комплексного числа?
3. Приведите две формы записи комплексного числа. Когда удобно использовать каждую из этих форм?
4. Назовите параметры гармонического сигнала. Как они влияют на его форму?
5. Дайте определение комплексному гармоническому сигналу и его комплексной амплитуде.
6. Как влияют параметры комплексного гармонического сигнала на его геометрический образ?
7. Как зависят от частоты емкостное и индуктивное сопротивления ?
8. В чем суть метода комплексных амплитуд? Приведите примеры его использования.
9. Дайте определение комплексно-частотной характеристике линейной цепи. Приведите пример ее расчета.
10. Дайте определение амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) линейной цепи. Как экспериментально определить эту характеристику?
11. Дайте определение фазо-частотной характеристике (ФЧХ) линейной цепи. Как экспериментально определить эту характеристику?

Типовые задачи к экзамену

1. Рассчитайте АЧХ и ФЧХ CR-цепи.
2. Рассчитайте АЧХ и ФЧХ RL-цепи.
3. Рассчитайте АЧХ и ФЧХ LR-цепи.
4. Ко входу CR цепочки подключен источник ЭДС $e(t) = 2\cos(2\pi m 10^3 t)$.

   Определите напряжение $u_R(t)$ на резисторе, если R=2 [ком], $C = \frac{1}{8\pi}$ [мкф].
5. Для заданной схемы, используя метод комплексных амплитуд,



определите напряжение на элементе Z_2, если $e_1(t)=E\cos(\omega_0 t)$, $E=1$В, $\omega_0=2\pi \cdot 10^4$; $i_2(t)=0$; $Z_1=Z_3=R=1$кОм; $Z_2=1/(j\omega_0 C)$, $C=10^{-7}/(2\pi)$Ф; $Z_4=Z_5=2R=2$кОм.