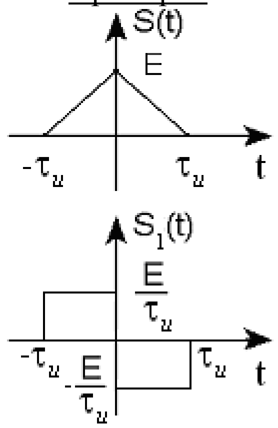
Лекция №17
Спектральный анализ непериодических сигналов.
Свойства преобразования Фурье. ([6] - стр. 33-53, [7] - стр. 27-49).
Часть 2

7. Дифференцирование сигналов.

$$\left.\begin{aligned} &F\{S(t)\} = \dot{S}(\omega) \\ &F\{S_1(t)\} = \dot{S}_1(\omega) \\ &S_1(t) = \frac{dS(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}_1(\omega) = j\omega\dot{S}(\omega) \quad (17.1)$$

При дифференцировании сигнала по времени его спектральная плотность умножается на $j\omega$. При этом уменьшается амплитуда низкочастотной составляющей и увеличивается амплитуда высокочастотной составляющей. Запись $F\{S(t)\}$ означает прямое преобразование Фурье от сигнала $S(t)$.

<u>Пример 1.</u>



Продифференцируем одиночный треугольный импульс. Результат дифференцирования приведем на рисунке.

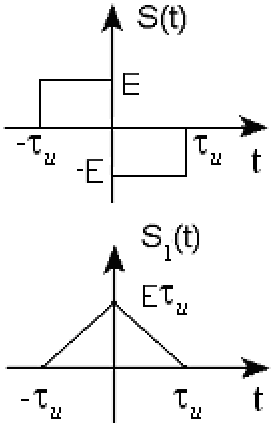
Из рисунка следует, что в результате дифференцирования, сигнал становится более изрезанным. Сопоставляя этот рисунок с формулой (17.1) , найдём, что чем изрезанней сигнал, тем больше амплитуда высокочастотной составляющей и наоборот.

8. Интегрирование сигналов с нулевой площадью.

$$\left.\begin{aligned} &F\{S(t)\} = \dot{S}(\omega) \\ &F\{S_1(t)\} = \dot{S}_1(\omega) \\ &S(t) = \int_{-\infty}^{t} S(V)dV \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}_1(\omega) = \frac{\dot{S}(\omega)}{j\omega} \quad (17.2)$$

При интегрировании сигнала по времени его спектральная плотность делится на jw. При этом повышается амплитуда низкочастотных составляющих и понижается амплитуда высокочастотных составляющих.

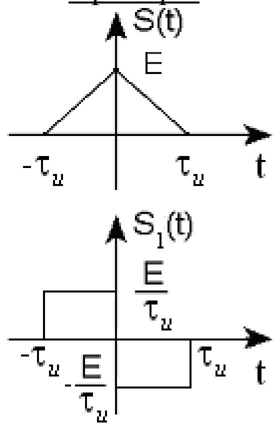
Пример 2.



Проинтегрируем пачку из двух разнополярных прямоугольных импульсов одинаковой длительности и амплитуды. Результат интегрирования приведем на рисунке

Из рисунка видно, что в результате интегрирования сигнал становится более гладким. Сопоставляя рисунок с формулой (17.2), можно утверждать, что с увеличением амплитуды низкочастотной составляющей и уменьшением амплитуды высокочастотной составляющей, сигнал становится более гладким. Справедливо и обратное.

Пример 3



$S(\omega) = ?$

Найти спектр одиночного треугольного импульса (см.рис.)

Решение

1. Продифференцируем исходный сигнал по времени (см.рис.).

2. Используя спектральную плотность для одиночного прямоугольного импульса, а также свойства: смещение сигнала во времени, умножение сигнала на число и сложение сигналов, запишем спектральную плотность полученного сигнала.

Обозначим спектральную плотность одиночного прямоугольного импульса через $\dot{S}_0(\omega)$.

$$\dot{S}_0(\omega) = E\tau_u \, sinc\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right)$$ (см. пример 1 лекции 16). Тогда

$$\dot{S}_1(\omega) = \frac{\dot{S}_0(\omega)}{\tau_u} e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}} - \frac{\dot{S}_0(\omega)}{\tau_u} e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}} = \frac{\dot{S}_0(\omega)}{\tau_u}\left(e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}}\right)$$

Для определения спектральной плотности заданного сигнала $S(t)$ воспользуемся свойством 8 – интегрирование сигнала с нулевой площадью. Тогда, используя (17.2), имеем

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{S}_1(\omega)}{j\omega} = \frac{2\dot{S}_0(\omega)}{\omega\tau_u}\left(\frac{e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}}}{2j}\right) = \frac{2\dot{S}_0(\omega)}{\omega\tau_u} sin\frac{\omega\tau_u}{2} =$$

$$= E\tau_u\left(sinc\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right)\right)^2$$

Воспользуемся свойством 2 (см. лекцию 16) для проверки правильности решения:

$\dot{S}(0) = E\tau_u$, то есть значение спектральной плотности в нуле равно площади под кривой, описывающей сигнал.

9. Изменение масштаба времени сигналов.

$$\left.\begin{aligned} &S_1(t) = S(at) \\ &F\{S_1(t)\} = \dot{S}_1(\omega) \\ &F\{S(t)\} = \dot{S}(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}_1(\omega) = \frac{1}{a}\dot{S}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Если $a > 1$, то сигнал сжимается во времени, а его спектральная плотность уменьшается в a раз и растягивается в a раз по частоте.

Чем короче сообщение, тем шире его спектр и тем шире должна быть полоса пропускания канала обработки информации.

Если 0<a<1, то сигнал растягивается во времени, а его спектральная плотность увеличивается в a раз и сжимается в a раз по частоте.

10. Перемножение сигналов.

$$\left.\begin{aligned} &F\{S(t)\} = \dot{S}(\omega) \\ &F\{S_1(t)\} = \dot{S}_1(\omega) \\ &F\{S_2(t)\} = \dot{S}_2(\omega) \\ &S(t) = S_1(t)S_2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(u)\dot{S}_2(\omega-u)du = \dot{S}_1(\omega) * \dot{S}_2(\omega)$$

Если сигнал получается в результате перемножения двух сигналов, то его спектр определяется с помощью интеграла свертки спектров сомножителей.

11. Спектр свертки двух сигналов.

$$\left.\begin{aligned} &S(t) = \int_{-\infty}^{t} S_1(\tau)S_2(t-\tau)d\tau \\ &F\{S(t)\} = \dot{S}(\omega) \\ &F\{S_1(t)\} = \dot{S}_1(\omega) \\ &F\{S_2(t)\} = \dot{S}_2(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2(\omega)$$

Если сигнал получен в результате вычисления интеграла свертки двух сигналов, то его спектр равен произведению этих сигналов.

12. Свойство обратимости частоты и времени.

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{S(t) = S(-t)} \\ &\mathrm{F\{S(t)\} = U(\omega)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{F\{U(t)\} = 2\pi S(\omega)}$$

Если сигнал $S(t)$ чётный со спектром $U(\omega)$, то для расчёта спектра сигнала $U(t)$, повторяющего по форме спектр исходного сигнала, достаточно в формуле $S(t)$, описывающей исходный сигнал, заменить t на ω и результат умножить на 2π .

Пример 4

Найти спектр сигнала, заданного функцией $U(t) = E_1 \sin c\left(\frac{\pi t}{t_1}\right)$ (см.рис.17.1)

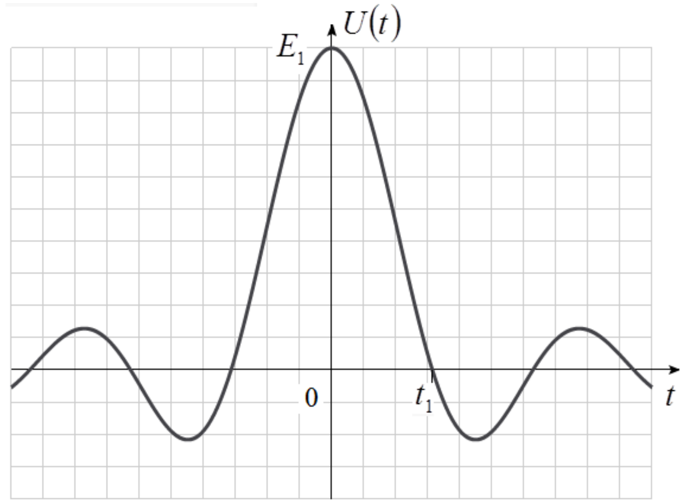


Рис.17.1

Решение

Сигнал $U(t)$ чётный. Поэтому воспользуемся свойством 12 обратимости частоты и времени. Мы знаем (лекция 16), что спектр одиночного прямоугольного импульса, расположенного чётным образом (рис.17.2) описывается функцией

$U(\omega) = E\tau_u \sin c\left(\frac{\omega \tau_u}{2}\right)$ (рис.17.3)

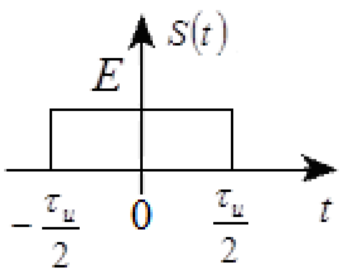


Рис.17.2

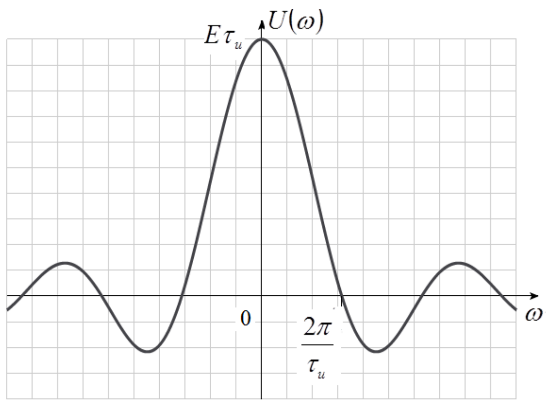


Рис.17.3

Сигнал $U(t)$ (рис.17.4) повторяет форму спектра $U(\omega)$ (рис.17.3) сигнала $S(t)$ (рис.17.2). Поэтому его спектр $S(\omega)$ (рис.17.5) повторяет форму сигнала $S(t)$. Осталось определить параметры спектра $S(\omega)$: величины $S(0)$ и ω_1. Для этого установим связь между параметрами сигналов, то есть между параметрами прямоугольного импульса E, τ_u и параметрами заданного сигнала E_1, t_1.

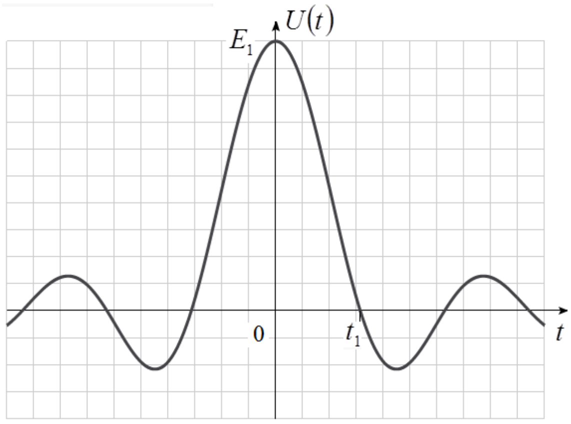


Рис.17.4

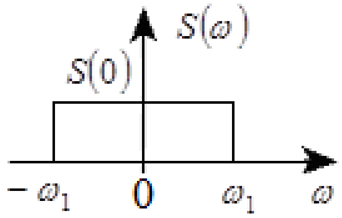


Рис.17.5

Эту связь изобразим в виде схемы, в которой знак $\rightarrow$ заменяет слово «соответствует».

$\frac{2\pi}{\tau_и} \rightarrow t_1$ тогда $\tau_и \rightarrow \frac{2\pi}{t_1}$ и $\frac{\tau_и}{2} \rightarrow \frac{\pi}{t_1}$, то есть в спектре $S(\omega)$ (рис.17.5) $\omega_1 = \frac{\pi}{t_1}$.

В сою очередь $E\tau_и \rightarrow E_1$, учитывая, что $\tau_и \rightarrow \frac{2\pi}{t_1}$, имеем $E \rightarrow \frac{E_1 t_1}{2\pi}$. Умножив полученное выражение на 2π, получим $S(0) = E_1 t_1$.

Таким образом, спектр сигнала $U(t) = E_1\, sinc\left(\frac{\pi t}{t_1}\right)$ имеет прямоугольную форму с параметрами $\omega_1 = \frac{\pi}{t_1}$, $S(0) = E_1 t_1$ (рис.17.5).

13. Умножение сигнала на гармоническую функцию.

$$\left.\begin{array}{l} F\{S_1(t)\} = \dot{S}_1(\omega) \\ F\{S(t)\} = \dot{S}(\omega) \\ S_1(t) = S(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{S}_1(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}S(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}S(\omega+\omega_0)$$

Если сигнал умножается на гармоническую функцию, то его спектр раздваивается. Кроме того, каждая его половина уменьшается в 2 раза и смещается влево и вправо симметричным образом относительно оси ординат на частоту ω_0. Это свойство показывает, что для смещения спектра передаваемого сообщения в заданный частотный диапазон достаточно умножить передаваемое сообщение на гармонический сигнал с частотой равной частоте середины заданного частотного диапазона.

Энергия непериодического сигнала. Равенство Парсеваля.

Прямое преобразование Фурье от произведения двух сигналов определяется как интеграл свёртки от преобразований Фурье сомножителей. Иными словами спектр произведения двух сигналов равен свёртке спектров сомножителей (свойство 10).

То есть, если $\left.\begin{array}{r} F\{g(t)\}=\dot{G}(\omega) \\ F\{y(t)\}=\dot{Y}(\omega) \\ F\{u(t)\}=\dot{U}(\omega) \\ u(t)=g(t)\cdot y(t) \end{array}\right\}$, то

$$\dot{U}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\dot{Y}(\omega-x)dx \quad (17.3)$$

С другой стороны спектр произведения двух сигналов можно вычислить с помощью прямого преобразования Фурье от этого произведения

$$\dot{U}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot y(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \quad (17.4).$$

Левые части формул (17.3) и (17.4) равны, приравняем правые части этих равенств

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot y(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\dot{Y}(\omega-x)dx$$

При $\omega=0$ имеем $\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot y(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\dot{Y}(-x)dx$ (17.5)

Если $g(t)=y(t)=s(t)$, то $\dot{G}(x)=\dot{Y}(x)=\dot{S}(x)$. Учитывая, что $\dot{S}(-x)=\dot{S}^{*}(x)$ и заменяя x на ω, получим вместо (17.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(x)\dot{S}^{*}(x)dx \text{ или}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|^2d\omega \quad (17.6)$$

Равенство (17.6) называется равенством Парсеваля. Учитывая чётность функции $\left|\dot{S}(\omega)\right|^2$, описывающей квадрат модуля спектра сигнала, можно упростить правую часть этого равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|^2d\omega.$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=Э_s$, где $Э_s$ - энергия сигнала $s(t)$, то с помощью этого равенства можно вычислить энергию сигнал, зная либо сам сигнал, либо его спектр.

Функцию $W(\omega)=\left|\dot{S}(\omega)\right|^2$ называют спектральной плотностью энергии сигнала. Тогда энергию сигнала можно найти по формуле $Э_s=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}W(\omega)d\omega$

Контрольные вопросы к лекции №17

1. Сформулируйте основные свойства преобразования Фурье.
2. Что происходит со спектром сигнала при сжатии сигнала во времени?
3. Для чего можно использовать умножение импульсного сигнала на гармоническую функцию?
4. Что происходит со спектром сигнала после его дифференцирования и как это влияет на форму сигнала?
5. Что происходит со спектром сигнала после его интегрирования и как это влияет на форму сигнала?
6. Для спектрального анализа каких сигналов можно использовать свойство обратимости частоты и времени?
7. Для чего применяется равенство Парсеваля

Типовые задачи к лекции 17

1. Определите спектральную плотность сигнала в форме равнобокой трапеции, если его амплитуда E, а длительность $\tau_и=3\tau_0$. Начало сигнала выберите на оси времени произвольно.
2. Определите спектральные плотности двух прямоугольных импульсов одинаковой амплитуды $E_1=E_2=E$ и длительностями $\tau_{и1}=\tau_и$ и $\tau_{и2}=2\tau_и$. Сравните и сделайте выводы. Начало сигнала выберите на оси времени произвольно.
3. Определите спектральную плотность сигнала $S(t)=S_0(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$, где $S_0(t)$-прямоугольный импульс с амплитудой E и длительностью $\tau_и$, расположенный симметрично относительно t=0, $\omega_0 >> \frac{2\pi}{\tau_и}$.