Лекция №16 ([6] - стр. 27-53, [7] - стр. 22-49).

Спектральный анализ непериодических сигналов.

На прошлой лекции мы установили, что если амплитуду каждой спектральной линии умножить на период, то полученная характеристика не зависит от периода и может служить для описания свойств непериодических сигналов. Мы назвали эту характеристику спектральной плотностью.

Спектральная плотность: $\dot{S}(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dot{c}_n\cdot T=\lim\limits_{\omega_1\to 0}\dfrac{\dot{c}_n}{\omega_1}2\pi=\lim\limits_{\Delta\omega\to 0}\dfrac{\dot{c}_n}{\Delta\omega}2\pi$, где $T=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$;

$\dot{c}_n=\dfrac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}S(t)e^{jn\omega_1 t}dt$, $\Delta\omega$ - расстояние между 2-мя соседними гармониками.

Периодический сигнал можно представить в виде комплексного ряда Фурье

$$S(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{c}_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Если $T\to\infty$, то $\left.\begin{array}{l}\Delta\omega\to 0\\ n\omega_1\to\omega\\ \dot{S}(n\omega_1)\to\dot{S}(\omega)\\ \Delta\omega\to d\omega\\ \dot{C}_n\to\dot{S}(\omega)d\omega\dfrac{1}{2\pi}\\ \sum\to\int\end{array}\right\}\to S(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Равенство $S(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ называется обратным преобразованием Фурье.

Вернёмся к соотношению $\dot{S}(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dot{c}_n\cdot T=\lim\limits_{T\to\infty}T\cdot\dfrac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}S(t)e^{jn\omega_1 t}dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S(t)e^{-j\omega t}dt$.

$\dot{S}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S(t)e^{-j\omega t}dt$. Это равенство называется прямым преобразованием Фурье

Используя прямое и обратное преобразования Фурье, можно решить задачу анализа прохождения непериодического сигнала через цепь с помощью спектрального метода.

Спектральный метод анализа удобно использовать в двух случаях:

1) Когда входной сигнал представлен малым числом гармоник или является непериодическим.

2) Когда прямое преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье вычислить проще, чем прямое преобразование Лапласа и обратное преобразование Лапласа.

Спектральное свойство непериодического сигнала характеризуется спектральной плотностью $\dot{S}(\omega)$, которая определяется отношением комплексной амплитуды гармоники к полосе частот, содержащих только эту гармонику: $\dfrac{\dot{c}_n}{\Delta\omega}$. Размерность спектральной плотности $\left[\dfrac{В}{Гц}\right]$

$\dot{S}(\omega)=\left|\dot{S}(\omega)\right|e^{j\Theta(\omega)}$ $\left|\dot{S}(\omega)\right|$ - спектральная плотность амплитуд, $\Theta(\omega)$ - фазовый спектр.

Спектральная плотность амплитуд характеризуется отношением бесконечно малой амплитуды гармоники к бесконечно узкой полосе частот, содержащей только эту гармонику. Размерность спектральная плотности амплитуд $\left[\frac{B}{Гц}\right]$.

Обратное преобразование Фурье можно записать в виде

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|e^{j\Theta(\omega)}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|e^{j(\omega t+\Theta(\omega))}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|cos(\omega t+\Theta(\omega))d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|sin(\omega t+\Theta(\omega))d\omega$$

Сигнал $S(t)$ - действительная функция времени. Поэтому мнимая часть последнего выражения равна нулю: $\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|sin(\omega t+\Theta(\omega))d\omega=0$. А это возможно, если модуль спектральной плотности – чётная функция, а аргумент – нечётная функция. Тогда появляется ещё одна форма обратного преобразования Фурье

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|cos(\omega t+\Theta(\omega))d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|cos(\omega t+\Theta(\omega))d\omega.$$

Сопоставим между собой представление периодического сигнала в виде суммы гармоник и непериодического сигнала, вычисленного с помощью обратного преобразования Фурье:

$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$ - сигнал периодический

$S(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\dot{S}(\omega)\right|cos(\omega t+\Theta(\omega))d\omega$ - сигнал непериодический

Из сопоставления следует, что амплитуде A_n гармоники периодического сигнала соответствует выражение $\frac{1}{\pi}\left|\dot{S}(\omega)\right|d\omega$ у непериодического сигнала, а начальной фазе φ_n гармоники периодического сигнала соответствует выражение $\Theta(\omega)$ непериодического сигнала.

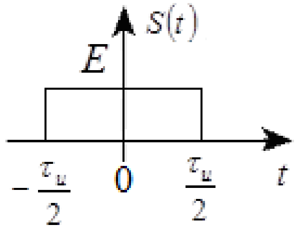
Спектры периодических сигналов с периодом T дискретны, заданы на множестве частот, кратных частоте первой гармоники $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ и в общем случае образуют счётное множество.

Спектры непериодических сигналов непрерывны, заданы на множестве частот, образующих континуальное (несчётное) множество.

Пример 1.

Определим спектральную плотность одиночного четного прямоугольного импульса.

Дано:

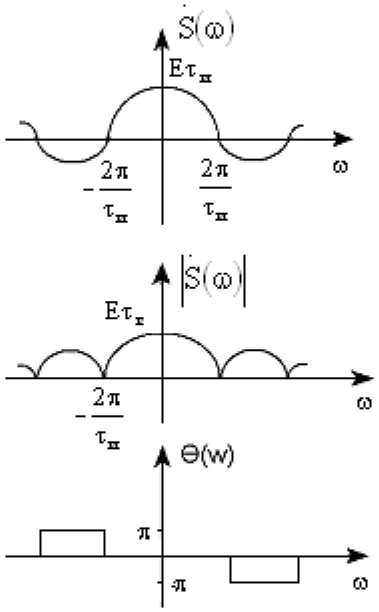


Найти: $\dot{S}(\omega) - ?$

Решение

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} Ee^{-j\omega t}dt = E\left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} = \frac{E}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}}\right) =$$

$$\frac{2E}{\omega}\frac{e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}}}{2j} = \frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau_u}{2} = \frac{2E\tau_u}{2}\frac{\sin\frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}} = E\tau_u Sinc\frac{\omega\tau_u}{2}$$



Сравним на этом примере ещё раз спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов и одиночного импульса:

1. Огибающая амплитудного и фазового спектра периодического сигнала совпадает по форме со спектральной плотностью амплитуд и фазовым спектром одиночного прямоугольного импульса.

2. Спектры периодического сигнала дискретны и определены на частотах, кратных частоте первой гармонике. Спектры одиночного импульса непрерывны и определены для любого значения частоты.

3. Размерность амплитудного спектра периодического сигнала совпадает с размерностью самого сигнала, а размерность спектральной плотности амплитуд определяется отношением размерности сигнала к размерности частоты.

4. Размерности фазового спектра периодического и непериодического сигналов совпадают, так же как и их смысл. Физический смысл фазового спектра – фазовый спектр показывает зависимость начальных фаз гармоник от частоты.

Свойства преобразования Фурье.

1. Изменение знака частоты.

$\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$

Если $\dot{S}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow S(-\omega) = \frac{1}{1-j\omega} = \dot{S}^*(\omega)$

Если изменить знак частоты на противоположный, то получим спектральную плотность, комплексно сопряжённую с исходной спектральной плотностью.

2. Значение спектральной плотности в нуле.

$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt$ - прямое преобразование Фурье будем обозначать с помощью оператора $F\{S(t)\}$

$$\dot{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)dt$$

Значение спектральной плотности в нуле численно равно площади под кривой, описывающей сигнал. Это свойство удобно использовать для проверки правильности вычисления прямого преобразования Фурье

3. Умножение сигнала на число (const).

Если $S_1(t) = aS(t)$ и $\left.\begin{aligned} F\{S(t)\} &= \dot{S}(\omega) \\ F\{S_1(t)\} &= \dot{S}_1(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}_1(\omega) = a\,\dot{S}(\omega)$

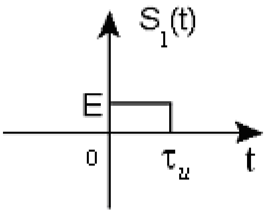
Если сигнал умножить на const, то и на эту же const умножится и его спектральная плотность.

4. Сдвиг сигнала во времени (теорема запаздывания).

$$\left.\begin{aligned} S_1(t) &= S(t - \tau_з) \\ F\{S(t)\} &= \dot{S}(\omega) \\ F\{S_1(t)\} &= \dot{S}_1(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}_1(\omega) = \dot{S}(\omega) e^{-j\omega\tau_з}$$

Если сигнал запаздывает во времени на $\tau_з$, то его спектральная плотность умножается на $e^{-j\omega\tau_з}$. Если сигнал опережает исходный сигнал на $\tau_з$, то есть смещается влево по оси времени, то показатель экспоненты меняет свой знак на противоположный. Смещение сигнала во времени влияет только на его фазовый спектр и не влияет на его спектральную плотность амплитуд, т.е. $\varphi_1(\omega) = \varphi(\omega) - \omega\tau_з$

<u>Пример 2</u>.



$S_1(\omega) = ?$

Найдем спектр одиночного прямоугольного импульса (см. рис.), используя результаты примера 1.

Пусть $\tau_з = \dfrac{\tau_и}{2}$, тогда $\dot{S}(\omega) = E\tau_и Sinc\dfrac{\omega\tau_и}{2}$

$$S_1(\omega) = S(\omega) e^{-j\omega\tau_и/2} = E\tau_и Sinc\frac{\omega\tau_и}{2} e^{-j\omega\tau_и/2}$$

5. Спектр суммы сигналов.

$$\left.\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ F\{S(t)\} &= \dot{S}(\omega) \\ F\{S_1(t)\} &= \dot{S}_1(\omega) \\ F\{S_2(t)\} &= \dot{S}_2(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega)$$

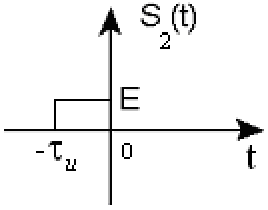
Спектр суммы сигналов равен сумме спектров каждого сигнала.

6. Изменение направления времени сигнала.

$$\left.\begin{aligned} S_1(t) &= S(-t) \\ F\{S(t)\} &= \dot{S}(\omega) \\ F\{S_1(t)\} &= \dot{S}_1(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{S}_1(\omega) = \dot{S}^*(\omega)$$

Если изменить направление времени сигнала, то есть заменить t на –t, то спектральная плотность нового сигнала будет комплексно сопряжена спектральной плотности исходного сигнала.

Пример 3.



$\dot{S}_2(\omega) = ?$

Найдем спектр сигнала $S_2(t)$ (см. рис.) по спектру сигнала $S_1(t)$, заданного в виде прямоугольного одиночного импульса (см. пример 2)

Для этого воспользуемся свойством: Изменение направления времени сигнала. Тогда

$$\dot{S}_1(\omega) = E\tau_u Sinc\frac{\omega\tau_u}{2} e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}}$$

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1^*(\omega) = E\tau_u Sinc\frac{\omega\tau_u}{2} e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}}$$

Контрольные вопросы к лекции №16

1. Для чего используются прямое и обратное преобразования Фурье?
2. Что происходит со спектром сигнала при изменении направления времени?
3. Что происходит со спектром сигнала при задержке сигнала во времени?
4. Что происходит со спектром сигнала при умножении сигнала на число?
5. Какое из свойств преобразования Фурье удобно использовать для проверки вычисления прямого преобразования Фурье?

Типовые задачи к лекции №16

1. Определите спектральную плотность пачки из двух прямоугольных импульсов одинаковой длительности $\tau_и$ с амплитудами E_1=E; E_2=E, если второй импульс задержан относительно первого на $\tau_{зад} = 3\tau_и$. Начало сигнала выберите на оси времени произвольно.
2. Определите спектральную плотность пачки из двух прямоугольных импульсов одинаковой длительности $\tau_и$ с амплитудами E_1=E; E_2=-E, если второй импульс задержан относительно первого на $\tau_{зад} = 3\tau_и$. Начало сигнала выберите на оси времени произвольно.
3. Определите спектральную плотность пачки из двух прямоугольных импульсов одинаковой длительности $\tau_и$ с амплитудами E_1=E; E_2=-2E, если второй импульс задержан относительно первого на $\tau_{зад} = 3\tau_и$. Начало сигнала выберите на оси времени произвольно.