

Лекция №15 ([6] - стр. 20-30, [7] - стр. 13-26).

Спектральный анализ периодического сигнала на основе комплексных рядов Фурье.

Рассмотрим спектральный анализ периодического сигнала на основе комплексных рядов Фурье. Это позволит упростить процедуру вычисления спектра периодического сигнала и, кроме того, перейти к спектральному анализу непериодических сигналов.

Воспользуемся формулами Эйлера для перехода от тригонометрических рядов Фурье к комплексным рядам.

$$1) \cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad 2) \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \quad 3) e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} (e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

Здесь $\dot{c}_0 = A_0$ - постоянная составляющая; $\dot{c}_n = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}$.

$$|\dot{c}_n| = \frac{A_n}{2}; \quad \arg \dot{c}_n = \varphi_n \quad (n > 0); \quad \arg \dot{c}_n = -\varphi_n \quad (n < 0);$$

Коэффициенты \dot{c}_n ряда Фурье вычисляются по формуле $\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$.

Итак, периодический сигнал $S(t)$ можно представить в виде комплексного ряда Фурье

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{jn\omega_1 t}.$$

1. Двусторонние спектры периодического сигнала.

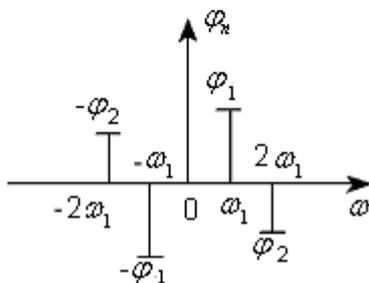
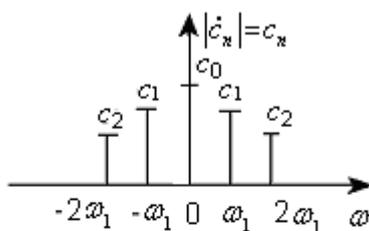
Двусторонним комплексным спектром периодического сигнала называется зависимость коэффициента \dot{c}_n от частоты.

Двусторонним амплитудным спектром периодического сигнала называется зависимость модуля коэффициента \dot{c}_n от частоты.

Двусторонним фазовым спектром периодического сигнала называется зависимость аргумента \dot{c}_n от частоты.

Для построения двустороннего амплитудного спектра по одностороннему амплитудному спектру, достаточно уменьшить амплитуды одностороннего спектра в 2 раза и отобразить их чётным образом относительно оси ординат. Не меняется только постоянная составляющая спектра. Поскольку $\dot{c}_0 = A_0$

Для построения двустороннего фазового спектра по одностороннему фазовому спектру, достаточно отобразить нечётным образом односторонний фазовый спектр относительно начала координат.



четная (двусторонний амплитудный спектр) и нечетная (двусторонний фазовый спектр) функции

На рисунке 15.1 изображен комплексный коэффициент \dot{c}_n , его модуль и аргумент.

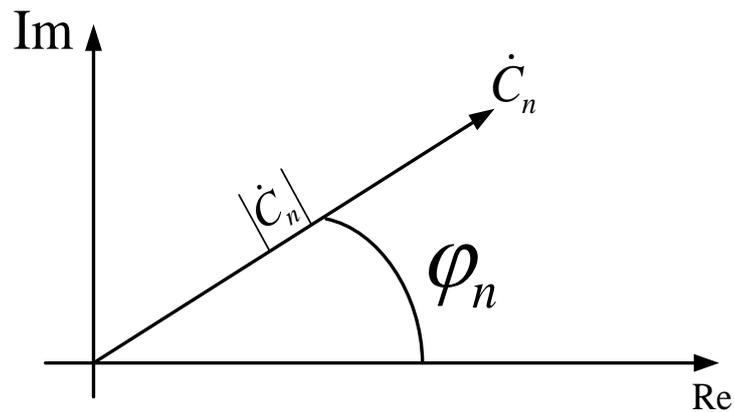


Рис.15.1

Пример 1

Построить двусторонний амплитудный и фазовый спектры сигнала

$$S(t) = E + E \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Решение

Воспользовавшись формулой Эйлера, имеем

$$S(t) = E + E \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = E + \frac{E}{2} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + \frac{E}{2} e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)} = E + \frac{E}{2} e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t} + \frac{E}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 t}.$$

Графики двустороннего амплитудного и фазового спектра сигнала изображены на рисунке 15.2

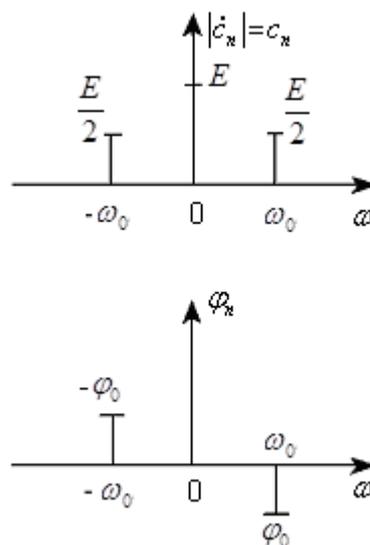
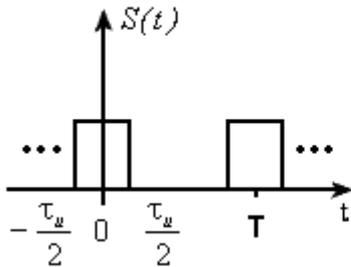


Рис.15.2

Пример 2

Рассчитать двусторонний амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов.

Дано:



$$S(t) = \begin{cases} E, & t \in \left\{ -\frac{\tau_u}{2} + Tn; \frac{\tau_u}{2} + Tn \right\} \\ 0, & t \notin \left\{ -\frac{\tau_u}{2} + Tn; \frac{\tau_u}{2} + Tn \right\} \end{cases}$$

Найти: c_n , $|c_n|$, φ_n .

Решение

$$\begin{aligned} \dot{c}_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} E e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{E}{T} \frac{e^{-jn\omega_1 t}}{-jn\omega_1} \Big|_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} = \frac{E}{T(-jn\omega_1)} (e^{-jn\omega_1 \frac{\tau_u}{2}} - e^{jn\omega_1 \frac{\tau_u}{2}}) = \\ &= \frac{E2}{Tn\omega_1} \frac{e^{jn\omega_1 \frac{\tau_u}{2}} - e^{-jn\omega_1 \frac{\tau_u}{2}}}{2j} = \frac{2E}{Tn\omega_1} \sin(n\omega_1 \frac{\tau_u}{2}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{E\tau_u}{T} \frac{\sin \frac{n\omega_1 \tau_u}{2}}{\frac{n\omega_1 \tau_u}{2}} = \frac{E\tau_u}{T} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\omega_1 \tau_u}{2} \right), \text{ где } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

$$c_0 = \frac{E\tau_u}{T} - \text{постоянная составляющая сигнала.}$$

На рисунке 15.3. изображены двухсторонний комплексный, амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов.

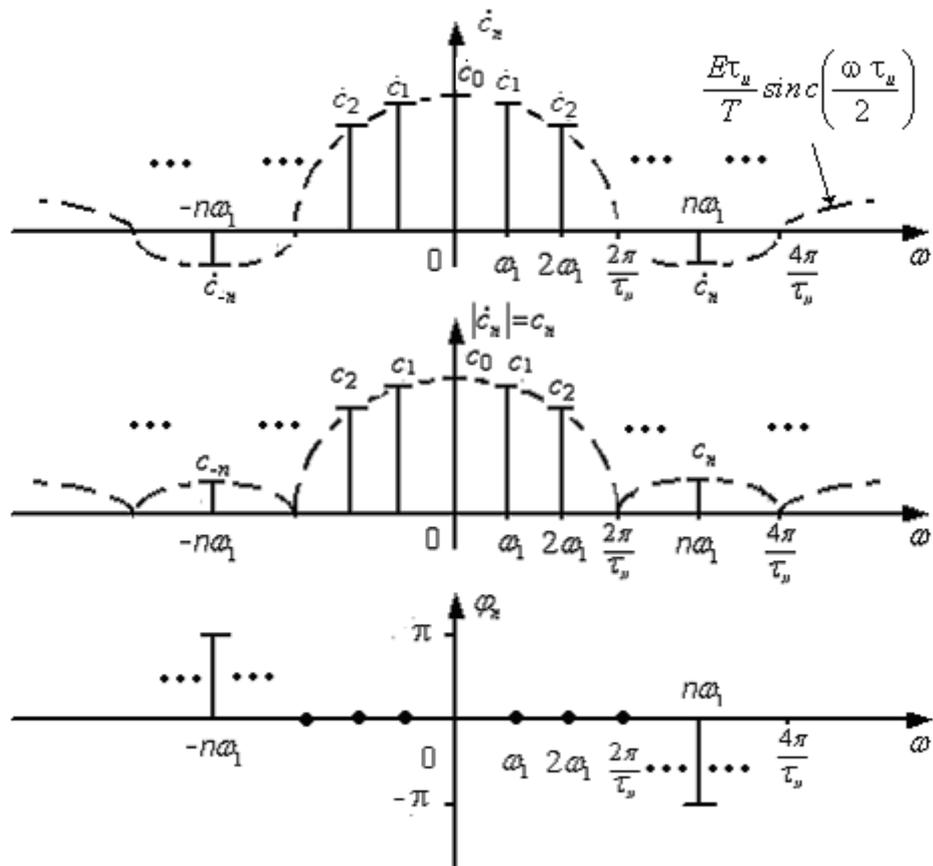


Рис.15.3

2. Исследование влияния периода повторения импульсов на коэффициенты \dot{c}_n .

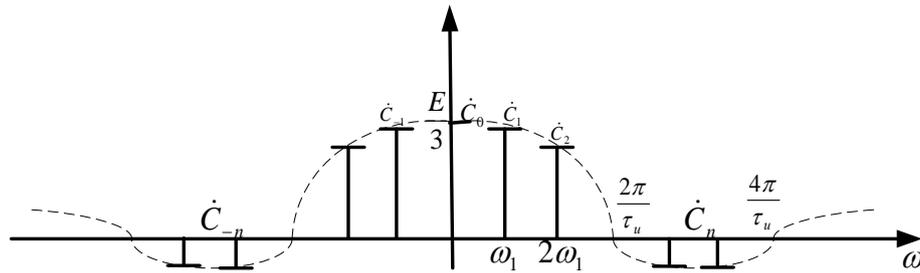
Рассмотрим 2 случая: $T_1 = 3\tau_u$, $T_2 = 6\tau_u$. Рассчитаем параметры спектров и сведём их в таблицу.

Таблица

$S_1(t)$	$S_2(t)$
$E_1 = E$	$E_2 = E$
$\tau_{u1} = \tau_u$	$\tau_{u2} = \tau_u$
$T_1 = 3\tau_u$	$T_2 = 6\tau_u$
$c_0 = \frac{E_1\tau_{u1}}{T_1} = \frac{E}{3}$	$c_0 = \frac{E_2\tau_{u2}}{T_2} = \frac{E}{6}$
$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{3\tau_u}$	$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{3\tau_u}$

Используя таблицу, изобразим два двусторонних комплексных спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов при различных периодах повторения:

1) $T_1 = 3\tau_u$



2) $T_2 = 2\tau_1 = 6\tau_u$

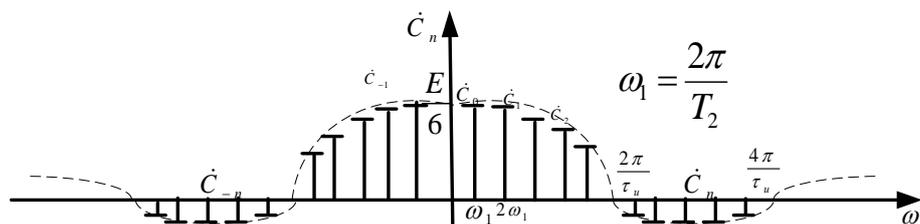


Рис.15.4

Из таблицы и из рисунка 15.4 следует, что с увеличением периода повторения сигнала пропорционально уменьшается амплитуда \dot{c}_n . Количество гармоник в конечном диапазоне частот увеличивается пропорционально увеличению периода. Частота первой гармоники уменьшается во столько же раз, во сколько увеличивается период. Расстояние между двумя соседними гармониками уменьшается во столько же раз, во сколько увеличивается период.

При стремлении периода к бесконечности, спектр вырождается в ось абсцисс, следовательно, ряды Фурье нельзя использовать для анализа непериодических сигналов. Если амплитуду каждой спектральной линии умножить на период, то полученная характеристика не зависит от периода и может служить для описания свойств непериодических сигналов. Назовём эту характеристику спектральной плотностью.

Спектральная плотность: $\dot{S}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \dot{c}_n \cdot T = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{c_n}{\omega_1} 2\pi = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{c_n}{\Delta\omega} 2\pi \left[\frac{B}{\Gamma\omega} \right] = [B \cdot c]$, где

$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, $\omega_1 = \Delta\omega$ - расстояние между двумя соседними гармониками

Спектральная плотность определяется отношением амплитуды гармоники к полосе частот $\Delta\omega$, содержащей только эту гармонику.

При стремлении периода к бесконечности амплитуда гармоник и полоса частот $\Delta\omega$ стремятся к нулю, а их отношение остается постоянным. Это отношение и называется спектральной плотностью.

Для получения формулы, позволяющей определить спектральную плотность, воспользуемся рядом Фурье $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega t}$ и найдем предел этого ряда при стремлении периода T к бесконечности, то есть при стремлении $\Delta\omega$ к нулю. Тогда получим

$$\left. \begin{array}{l} n\omega_1 \rightarrow \omega \\ \Delta\omega \rightarrow d\omega \\ \Delta\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{C}_n \rightarrow \dot{S}(\omega)d\omega \\ \sum \rightarrow \int \end{array} \right\} \rightarrow S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- это обратное преобразование Фурье.

Если вспомнить, что $\omega = 2\pi f$, то обратное преобразование Фурье примет вид

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(2\pi f) e^{j2\pi ft} df.$$

Существует и прямое преобразование Фурье. Если $\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$, то

$$\dot{S}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \dot{c}_n \cdot T = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Итак,

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) e^{-j\omega t} dt \text{ или учитывая, что } \omega = 2\pi f, \text{ имеем } \dot{S}(2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Модуль спектральной плотности называется спектральной плотностью амплитуд, а аргумент фазовым спектром непериодического сигнала.

Контрольные вопросы к лекции №15

1. Для чего изучается спектральный анализ периодического сигнала на основе комплексных рядов Фурье?
2. Дайте определение двустороннему комплексному спектру сигнала.
3. Дайте определение двустороннему амплитудному спектру сигнала.
4. Дайте определение двустороннему фазовому спектру сигнала
5. Как построить двусторонний амплитудный спектр по одностороннему спектру?
6. Как построить двусторонний фазовый спектр по одностороннему спектру?
7. Как влияет период повторения сигнала на двусторонний комплексный спектр?
8. Дайте определение спектральной плотности сигнала.
9. Дайте определение спектральной плотности амплитуд.
10. Дайте определение фазовому спектру непериодического сигнала.

Типовые задачи к лекции №15

1. Какие из перечисленных частот: 2 кГц, 4 кГц, 5 кГц, 8 кГц, 25 кГц, 28 кГц отсутствуют в спектре периодической последовательности прямоугольных импульсов с периодом повторения $T=1$ мс и длительностью $\tau=0,2$ мс?
2. Определите односторонний амплитудный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой $E=4$ в, длительностью $\tau_i=100$ мкс и периодом $T=400$ мкс. Изобразите сигнал после исключения из спектра постоянной составляющей.
3. Определите двухсторонний амплитудный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой $E=5$ в, длительностью $\tau_i=100$ мкс и периодом $T=500$ мкс. Изобразите сигнал после увеличения постоянной составляющей его спектра в два раза.
4. Определите односторонний и двухсторонний амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)=2\cos(2\pi \cdot 10^3 t - 0,5\pi) + 4\cos(4\pi \cdot 10^3 t + 0,5\pi)$. Запишите аналитическое выражение нового сигнала, после увеличения амплитуды первой гармоники и уменьшения частоты второй гармоники исходного сигнала $s(t)$ в два раза.