

## Лекция №13

### Алгоритм построения АЧХ и ФЧХ линейной цепи по диаграмме “нулей” и “полюсов” её передаточной функции ([2], стр. 53-61)

#### 1. Связь диаграммы нулей и полюсов передаточной функции с АЧХ и ФЧХ

Представим передаточную функцию в виде отношения двух многочленов, разложив которые на множители, получим

$$K(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^m + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{p^n + \dots + \frac{a_0}{a_n}}{p^m + \dots + \frac{b_0}{b_m}} = K \cdot \frac{(p - p_{01}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_{11}) \dots (p - p_{1m})}, \text{ где } \begin{cases} K = \frac{a_n}{b_m}, \\ m \geq n \end{cases}$$

Перейдем от передаточной функции к КЧХ, заменив «р» на «jω». Тогда

$$P = j\omega \Rightarrow K(j\omega) = K \frac{(j\omega - P_{01}) \dots (j\omega - P_{0n})}{(j\omega - P_{11}) \dots (j\omega - P_{1m})}$$

$$j\omega - P_{0k} = \vec{Q}_k(\omega)$$

$$j\omega - P_{1i} = \vec{R}_i(\omega)$$

$$K(j\omega) = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)| e^{j\varphi_k(\omega)}}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)| e^{j\psi_i(\omega)}} = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)| e^{j\sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega)}}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)| e^{j\sum_{i=1}^m \psi_i(\omega)}} = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)|}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)|} e^{j\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega) - \sum_{i=1}^m \psi_i(\omega)\right)}$$

Геометрическим образом разности  $j\omega - P_{0k} = \vec{Q}_k(\omega)$  будет вектор  $\vec{Q}_k(\omega)$ , проведенный из точки  $P_{0k}$ , отображающей ноль передаточной функции, к точке  $j\omega$ . Геометрическим образом разности  $j\omega - P_{1i} = \vec{R}_i(\omega)$  будет вектор  $\vec{R}_i(\omega)$ , проведенный из точки  $P_{1i}$ , отображающей полюс передаточной функции, к точке  $j\omega$ . Напомним, что АЧХ это модуль КЧХ, а ФЧХ – аргумент КЧХ. Тогда

$$AЧХ = |K(j\omega)| = K \frac{\prod_{k=1}^n |\vec{Q}_k(\omega)|}{\prod_{i=1}^m |\vec{R}_i(\omega)|} \quad (13.1),$$

$$\PhiЧХ = \arg K(j\omega) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega) - \sum_{i=1}^m \psi_i(\omega)$$

где  $|K| = \frac{a_n}{b_m}$ ,

$|\vec{Q}_k(\omega)|$  - модуль (длина) вектора  $\vec{Q}_k(\omega)$ , проведенного из точки  $P_{0k}$ ,

отображающей ноль передаточной функции, к точке  $j\omega$ ,  $\varphi_k(\omega)$  - аргумент этого же вектора (угол между этим вектором и положительным направлением действительной оси),

$\left| \vec{R}_i(\omega) \right|$  - модуль (длина) вектора  $\vec{R}_i(\omega)$ , проведенного из точки  $P_{ni}$ ,

отображающей полюс передаточной функции, к точке  $j\omega$ ,  $\psi_i(\omega)$  - аргумент этого же вектора (угол между этим вектором и положительным направлением действительной оси).

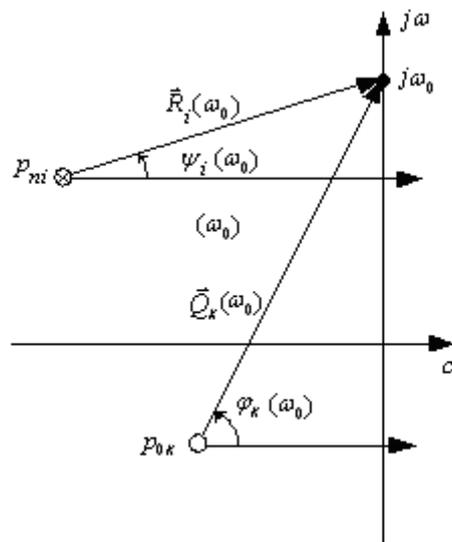


Рис.13.1.

На рисунке 13.1 изображены полюс передаточной функции  $P_{ni}$  (отмечен знаком  $\otimes$ ), ноль передаточной функции  $P_{0k}$  (отмечен знаком  $\circ$ ), векторы  $\vec{Q}_k(\omega_0)$  и  $\vec{R}_i(\omega_0)$ , проведенные к точке  $j\omega_0$  и их аргументы  $\varphi_k(\omega_0)$  и  $\psi_i(\omega_0)$  соответственно. Напомним, что нулём передаточной функции называется значение её аргумента, при котором числитель функции а, следовательно, и сама функция обращаются в ноль. Полюсом передаточной функции называется значение её аргумента, при котором знаменатель функции обращается в ноль.

С учетом выше сказанного и формул (13.1) рассмотрим алгоритм построения АЧХ и ФЧХ по диаграмме нулей и полюсов передаточной функции.

## 2. Алгоритм построения АЧХ.

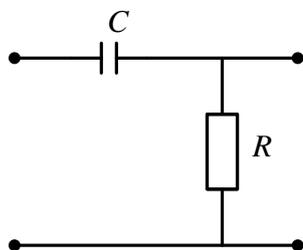
1. Найти “нули” и “полюса” передаточной функции.
2. Изобразить в выбранном масштабе эти нули и полюса на плоскости  $P$ .
3. Выбрать на оси ординат точку, соответствующую частоте  $\omega_0$ , для которой хотим рассчитать АЧХ.
4. Измерить или вычислить расстояние от всех нулей до этой точки в выбранном масштабе.
5. Найти их произведение. Если нулей нет, то числитель дроби, описывающий АЧХ, принимается равным  $|K| = \left| \frac{a_n}{b_m} \right|$ .
6. Сделать пункты 4-5 для полюсов.
7. Разделить первое произведение на второе.
8. Перейти к следующей частоте и проделать пункты 1-7 снова.

## Алгоритм построения ФЧХ .

- 1-3. См. предыдущий алгоритм.
4. Измерить углы  $\varphi_k(\omega_0)$  и найти их сумму.
5. Измерить углы  $\psi_i(\omega_0)$  и найти их сумму.
6. Найти разность между первой суммой и второй.
7. Перейти к следующей частоте и проделать пункты 1-6 снова.

## Пример:

Построить АЧХ CR цепи по диаграмме нулей и полюсов её передаточной функции.



Найдем передаточную функцию CR-цепи, нуль и полюса передаточной функции. Тогда

$$K(p) = \frac{p\tau_0}{p\tau_0 + 1}$$

$$p_{01} = 0$$
$$p_{11} = -\frac{1}{\tau_0}$$

Изобразим диаграмму нулей и полюсов и построим векторы  $\vec{Q}_1(\omega_0)$  и  $\vec{R}_1(\omega_0)$  для выбранной частоты  $\omega_0$  (см. рис. 13.2).

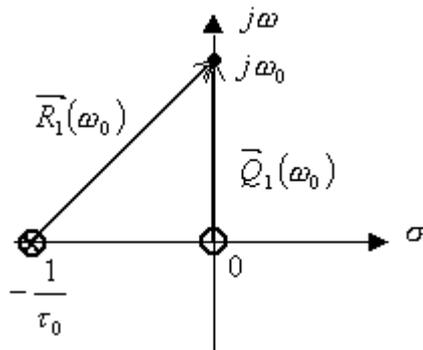


Рис.13.2.

Из диаграммы следует, что  $\vec{R}_1(\omega_0) = j\omega_0 - P_{П1} = j\omega_0 - \left(-\frac{1}{\tau_0}\right) = j\omega_0 + \frac{1}{\tau_0}$ ,

$$\vec{Q}_1(\omega_0) = j\omega_0 - P_{01} = j\omega_0.$$

Тогда  $\left|\vec{R}_1(\omega_0)\right| = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{\tau_0}\right)^2} = \frac{1}{\tau_0} \sqrt{(\omega_0 \tau_0)^2 + 1}$ ;  $\left|\vec{Q}_1(\omega_0)\right| = |\omega_0|$ .

АЧХ заданной цепи для произвольной частоты  $\omega$  будет определяться отношением

$$\frac{|\vec{Q}_1(\omega)|}{|\vec{R}_1(\omega)|} = \frac{|\omega| \tau_0}{\sqrt{(\omega \tau_0)^2 + 1}}.$$

График зависимости этого отношения от частоты  $\omega$  приведен на рисунке 13.3.

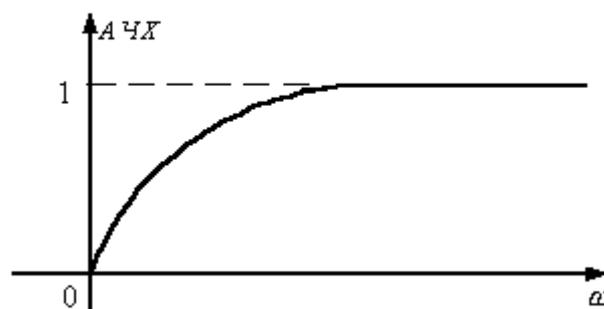


Рис. 13.3.

### Контрольные вопросы к лекции №13

1. Сформулируйте алгоритм построения АЧХ линейной цепи по диаграмме нулей и полюсов.
2. Сформулируйте алгоритм построения ФЧХ линейной цепи по диаграмме нулей и полюсов
3. Как изменится АЧХ CR-цепи в рассмотренном примере, если полюс передаточной функции приблизить к оси  $j\omega$  ?

#### Типовые задачи к экзамену

1. Передаточная функция цепи имеет два полюса  $p_{п1} = -0,5+2j$ ,  $p_{п2} = -0,5-2j$ . Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

2. Передаточная функция цепи имеет один ноль  $p_{01} = 0$  и два полюса  $p_{п1} = -0,5+2j$ ,  $p_{п2} = -0,5-2j$ . Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

3. Передаточная функция цепи имеет два одинаковых нуля  $p_{01} = p_{02} = 0$  и два полюса  $p_{п1} = -0,5+2j$ ,  $p_{п2} = -0,5-2j$ . Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

4. Постройте АЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой по диаграмме нулей и полюсов его передаточной функции, если  $R = 2$  [кОм],  $L = 1$  [мГн],  $C = 10$  [мкФ].

$$K(p) = \frac{p\tau_0}{p\tau_0 + 1}$$

$$p_{01} = 0$$
$$p_{п1} = -\frac{1}{\tau_0}$$