Лекция №13

# Алгоритм построения АЧХ и ФЧХ линейной цепи по диаграмме “нулей” и “полюсов” её передаточной функции

([2], стр. 53-61)

## 1. Связь диаграммы нулей и полюсов передаточной функции с АЧХ и ФЧХ

Представим передаточную функцию в виде отношения двух многочленов, разложив которые на множители, получим

$$K(p)=\frac{a_n p^n+...+a_0}{b_m p^m+...+b_0}=\frac{a_n}{b_m}\cdot\frac{p^n+...+\frac{a_0}{a_n}}{p^m+...+\frac{b_0}{b_m}}=K\cdot\frac{(p-p_{01})...(p-p_{0n})}{(p-p_{n1})...(p-p_{nm})},\text{ где }\begin{cases}K=\frac{a_n}{b_m},\\ m\geq n\end{cases}$$

Перейдем от передаточной функции к КЧХ, заменив «р» на « $j\omega$ ». Тогда

$$P=j\omega\Rightarrow K(j\omega)=K\frac{(j\omega-P_{01})...(j\omega-P_{0n})}{(j\omega-P_{n1})...(j\omega-P_{nm})}$$

$$j\omega-P_{0k}=\vec{Q}_k(\omega)$$

$$j\omega-P_{ni}=\vec{R}_i(\omega)$$

$$K(j\omega)=K\frac{\prod_{k=1}^{n}|\vec{Q}_k(\omega)|e^{j\varphi_k(\omega)}}{\prod_{i=1}^{m}|\vec{R}_i(\omega)|e^{j\Psi_i(\omega)}}=K\frac{\prod_{k=1}^{n}|\vec{Q}_k(\omega)|e^{j\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\omega)}}{\prod_{i=1}^{m}|\vec{R}_i(\omega)|e^{j\sum_{i=1}^{m}\Psi_i(\omega)}}=K\frac{\prod_{k=1}^{n}|\vec{Q}_k(\omega)|}{\prod_{i=1}^{m}|\vec{R}_i(\omega)|}e^{j(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\omega)-\sum_{i=1}^{m}\Psi_i(\omega))}$$

Геометрическим образом разности $j\omega-P_{0k}=\vec{Q}_k(\omega)$ будет вектор $\vec{Q}_k(\omega)$, проведенный из точки, отображающей ноль передаточной функции $P_{0k}$, к точке $j\omega$. Геометрическим образом разности $j\omega-P_{ni}=\vec{R}_i(\omega)$ будет вектор $\vec{R}_i(\omega)$, проведенный из точки, отображающей полюс передаточной функции $P_{ni}$, к точке $j\omega$. Напомним, что АЧХ это модуль КЧХ, а ФЧХ – аргумент КЧХ. Тогда

$$АЧХ=|K(j\omega)|=|K|\frac{\prod_{k=1}^{n}\left|\vec{Q}_k(\omega)\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|\vec{R}_i(\omega)\right|}\qquad(13.1),$$

$$ФЧХ=\arg K(j\omega)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\omega)-\sum_{i=1}^{m}\Psi_i(\omega)$$

где $|K|=\left|\frac{a_n}{b_m}\right|$,

$\left|\vec{Q}_k(\omega)\right|$ - модуль (длина) вектора $\vec{Q}_k(\omega)$, проведенного из точки, отображающей ноль передаточной функции $P_{0k}$, к точке $j\omega$, $\varphi_к(\omega)$ - аргумент этого же вектора (угол между этим вектором и положительным направлением действительной оси),

$\left|\overrightarrow{R_i}(\omega)\right|$ - модуль (длина) вектора $\overrightarrow{R_i}(\omega)$, проведенного из точки, отображающей полюс передаточной функции $P_{ni}$, к точке $j\omega$, $\psi_i(\omega)$ - аргумент этого же вектора (угол между этим вектором и положительным направлением действительной оси).

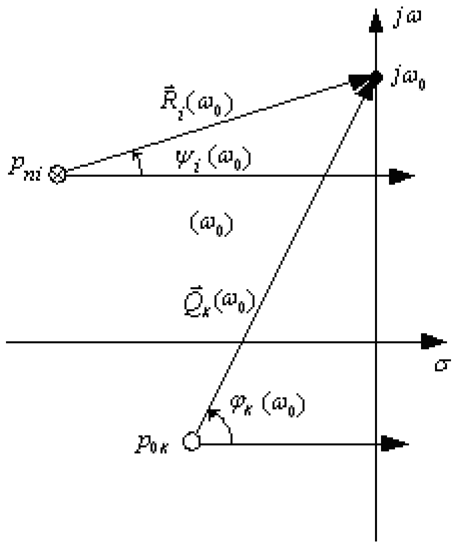



Рис.13.1.

На рисунке 13.1 изображены полюс передаточной функции $P_{ni}$ (отмечен знаком ⊗), ноль передаточной функции $P_{0k}$ (отмечен знаком о), векторы $\overrightarrow{Q_k}(\omega_0)$ и $\overrightarrow{R_i}(\omega_0)$, поведенные к точке $j\omega_0$ и их аргументы $\varphi_к(\omega_0)$ и $\psi_i(\omega_0)$ соответственно. С учетом выше сказанного и формул (13.1) рассмотрим алгоритм построения АЧХ и ФЧХ по диаграмме нулей и полюсов передаточной функции.

**2. Алгоритм построения АЧХ.**

1. Найти “нули” и “полюса” передаточной функции.
2. Изобразить в выбранном масштабе эти нули и полюса на плоскости *P*.
3. Выбрать на оси ординат точку, соответствующую частоте $\omega_0$, для которой хотим рассчитать АЧХ.
4. Измерить или вычислить расстояние от всех нулей до этой точки в выбранном масштабе.
5. Найти их произведение. Если нулей нет, то числитель дроби, описывающий АЧХ, принимается равным $|K| = \left|\frac{a_n}{b_m}\right|$.
6. Сделать пункты 4-5 пункты для полюсов.
7. Разделить первое произведение на второе.
8. Перейти к следующей частоте и проделать пункты 1-7 снова.

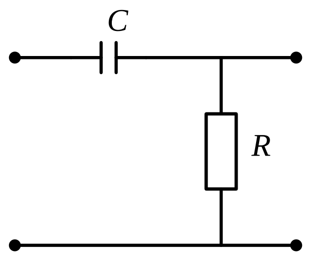
**Алгоритм построения ФЧХ .**

1-3. См. предыдущий алгоритм.

4. Измерить углы $\varphi_k(\omega_0)$ и найти их сумму.
5. Измерить углы $\psi_i(\omega_0)$ и найти их сумму.
6. Найти разность между первой суммой и второй.
7. Перейти к следующей частоте и проделать пункты 1-6 снова.

**Пример:**

Построить АЧХ CR цепи по диаграмме нулей и полюсов её передаточной функции.



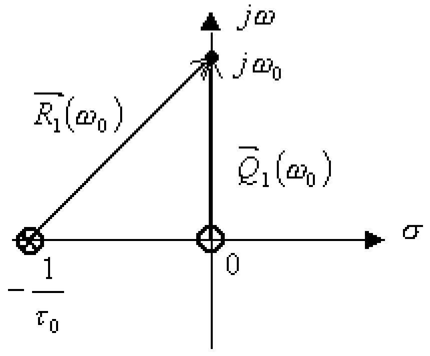

Найдем передаточную функцию CR-цепи, нуль и полюса передаточной функции. Тогда

$$K(p) = \frac{p\tau_0}{p\tau_0 + 1} = \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_0}}$$

$$p_{01} = 0$$

$$p_{n1} = -\frac{1}{\tau_0}$$

Изобразим диаграмму нулей и полюсов и построим векторы $\vec{Q}_1(\omega_0)$ и



$\overrightarrow{R_1}(\omega_0)$ для произвольной частоты $\omega_0$ (см. рис. 13.2).

Рис.13.2.

АЧХ заданной цепи будет определяться отношением $\dfrac{\left|\overrightarrow{Q}_1(\omega)\right|}{\left|\overrightarrow{R}_1(\omega)\right|}$. График зависимости этого отношения от частоты $\omega$ приведен на рисунке 13.3.

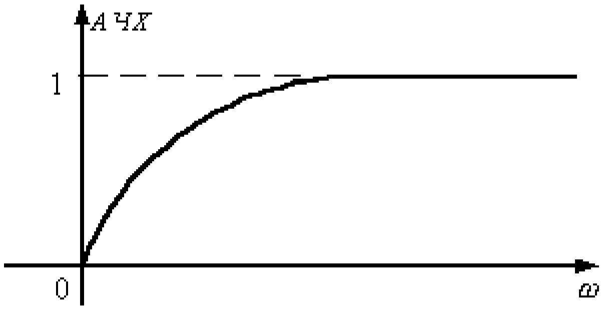



Рис. 13.3.

Контрольные вопросы к лекции №13

1. Сформулируйте алгоритм построения АЧХ линейной цепи по диаграмме нулей и полюсов.
2. Сформулируйте алгоритм построения ФЧХ линейной цепи по диаграмме нулей и полюсов
3. Как изменится АЧХ CR-цепи в рассмотренном примере, если полюс передаточной функции приблизить к оси $j\omega$?

Типовые задачи к экзамену

1. Передаточная функция цепи имеет два полюса $p_{п1}$= -0,5+2j, $p_{п2}$= -0,5-2j . Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

2. Передаточная функция цепи имеет один ноль $p_{01}$=0 и два полюса $p_{п1}$= -0,5+2j, $p_{п2}$= -0,5-2j . Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

3. Передаточная функция цепи имеет два одинаковых нуля $p_{01}$= $p_{02}$=0 и два полюса $p_{п1}$= -0,5+2j, $p_{п2}$= -0,5-2j . Найдите несколько значений АЧХ и ФЧХ этой цепи.

4. Постройте АЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой по диаграмме нулей и полюсов его передаточной функции, если $R = 2$ [кОм], L=1 [мГн], C=10 [мкФ].