

Лекция №12
([2], стр. 53-61).

Диаграмма нулей и полюсов передаточной функции. Связь передаточной функции с основными характеристиками цепей.

1. Связь шести основных характеристик линейных цепей друг с другом.

Изобразим на схеме связь между шестью характеристиками линейной цепи: передаточной функцией $K(p)$, комплексно-частотной характеристикой $K(j\omega)$, амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), фазочастотной характеристикой (ФЧХ), импульсной $g(t)$ и переходной $h(t)$ характеристиками. Из этой схемы (см. рис12.1) вы можете понять, как, зная одну из характеристик, вычислить остальные.

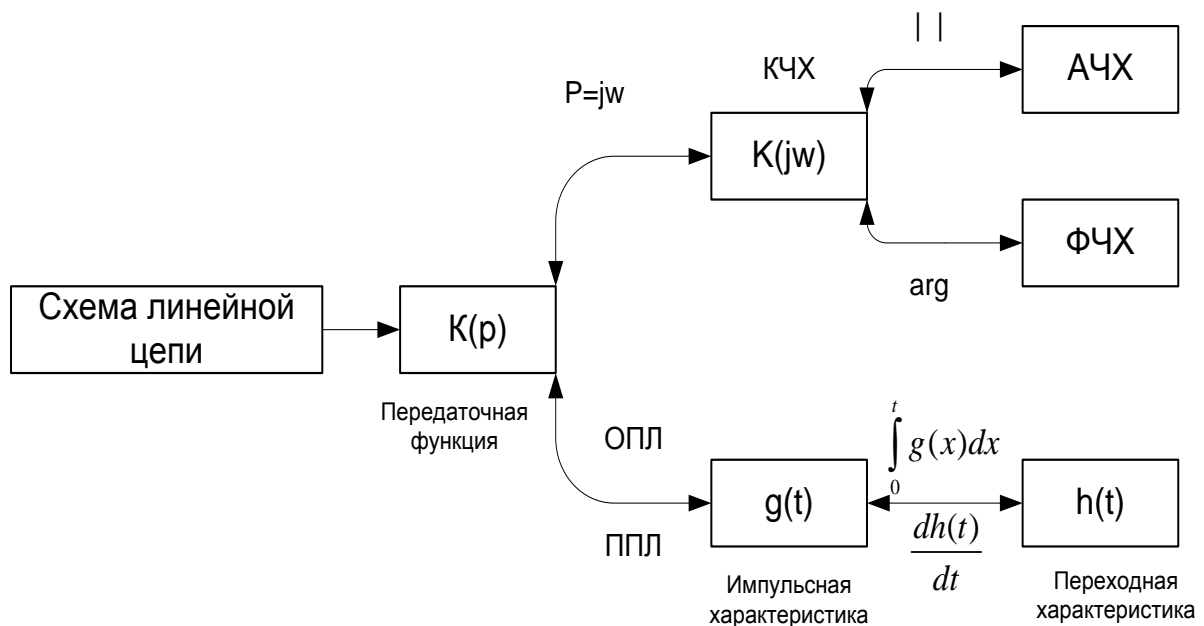


Рис.12.1

Связи между характеристиками были установлены раньше. Приведенная схема позволяет систематизировать полученные сведения. Из этой схемы в частности следует, что, зная передаточную функцию цепи можно с помощью обратного преобразования Лапласа найти ее импульсную характеристику и наоборот, зная импульсную характеристику цепи можно с помощью прямого преобразования Лапласа найти ее передаточную функцию. С помощью схемы вы самостоятельно можете установить связи между другими характеристиками цепи.

Напомним, что переменная $p = \sigma + j\omega$, используемая в качестве аргумента в преобразовании Лапласа, имеет размерность c^{-1} . У этой переменной действительная часть σ называется затуханием, а мнимая ω - циклической частотой. Эти понятия мы будем использовать при анализе влияния диаграммы полюсов передаточной функции на поведение импульсной характеристики. Они используются при описании сигнала $S(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t$, амплитуда которого меняется по экспоненте. Причем сигнал затухает по амплитуде при $\sigma < 0$ и нарастает при $\sigma > 0$.

2. Связь диаграммы “полюсов” передаточной функции с импульсной характеристикой линейной цепи.

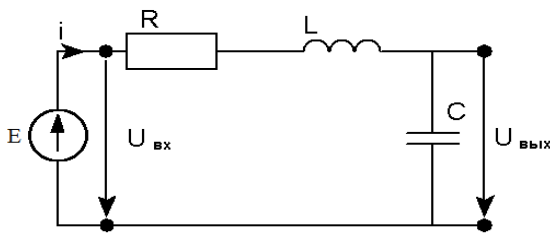
Установим связь диаграммы “полюсов” передаточной функции линейной цепи с её импульсной характеристикой. Передаточную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов, разложив которые на множители, получим

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n (p - p_{01}) \dots (p - p_{0n})}{b_m (p - p_{n1}) \dots (p - p_{nm})}, \text{ где}$$

P_{0k} - нуль, значение переменной P , при котором числитель обращается в ноль.

P_{ni} - полюс, значение переменной P , при котором знаменатель обращается в ноль.

Исследуем влияния диаграммы “полюсов” передаточной функции последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой на его импульсную характеристику. Для этого, зная КЧХ контура, найдем его передаточную функцию и импульсную характеристику. Для определения передаточной функции по КЧХ достаточно заменить « $j\omega$ » в формуле КЧХ на « p ». Формулу КЧХ мы вывели в лекции 7.



$$K(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Тогда передаточная функция

$$K(p) = \frac{1}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_p^2}{p^2 + 2\alpha p + \omega_p^2}$$

Найдем полюса передаточной функции:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_p^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_{\Pi 1} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} \\ p_{\Pi 2} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{\Pi 1} = -\alpha + j\sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} \\ p_{\Pi 2} = -\alpha - j\sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{\Pi 1} = -\alpha + j\omega_{св} \\ p_{\Pi 2} = -\alpha - j\omega_{св} \end{cases}$$

где:

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC} - \text{квадрат резонансной частоты контура,}$$

$$2\alpha = \frac{R}{L} - \text{затухание контура, } \sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} = \omega_{св} - \text{частота свободных колебаний}$$

контура, $p_{\Pi 1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}$ - полюса передаточной функции.

Импульсную характеристику найдем с помощью обратного преобразования Лапласа от передаточной функции.

$$\begin{aligned}
 g(t) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \lim_{p \rightarrow -\alpha + j\omega_{ce1}} \frac{\omega_p^2 e^{pt} (p + \alpha - j\omega_{ce1})}{(p + \alpha + j\omega_{ce1})(p + \alpha - j\omega_{ce1})} \right\} = 2\omega_p^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{(-\alpha + j\omega_{ce1})t}}{-\alpha + j\omega_{ce1} + \alpha + j\omega_{ce1}} \right\} \cdot 1(t) = \\
 &= 2\omega_p^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-\alpha t} e^{j\omega_{ce1}t}}{2j\omega_{ce1}} \right\} \cdot 1(t) = \omega_p^2 e^{-\alpha t} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos \omega_{ce1}t + j \sin \omega_{ce1}t}{j\omega_{ce1}} \right\} \cdot 1(t) = \\
 &= \omega_p^2 e^{-\alpha t} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos \omega_{ce1}t}{j\omega_{ce1}} + \frac{j \sin \omega_{ce1}t}{j\omega_{ce1}} \right\} \cdot 1(t) = \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce1}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{ce1}t \cdot 1(t)
 \end{aligned}$$

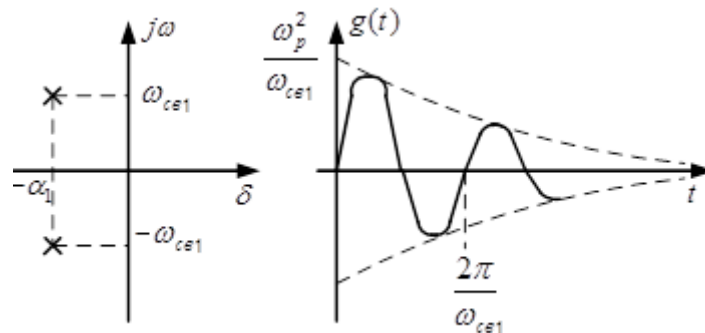


Рис.12.2.

На рисунке 12.2. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при затухании $\alpha_1 > 0$ и частоте свободных колебаний ω_{ce1} .

При смещении полюсов влево импульсная характеристика затухает быстрее.

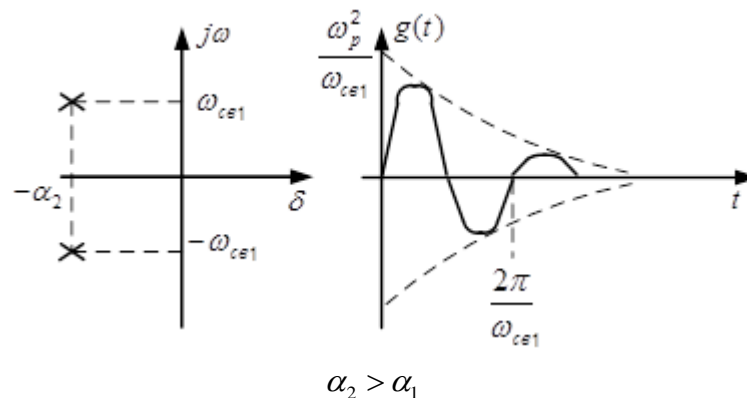


Рис. 12.3.

На рисунке 12.3. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при смещении полюсов влево, то есть при увеличении затухания контура α ($\alpha_2 > \alpha_1$).

Если затухание отрицательно, то полюса лежат в правой полуплоскости, и импульсная характеристика нарастает с ростом аргумента. Это означает

неустойчивость данной линейной цепи, т.е. после прекращения воздействия извне (входного сигнала) напряжение на выходе не стремится к нулю.

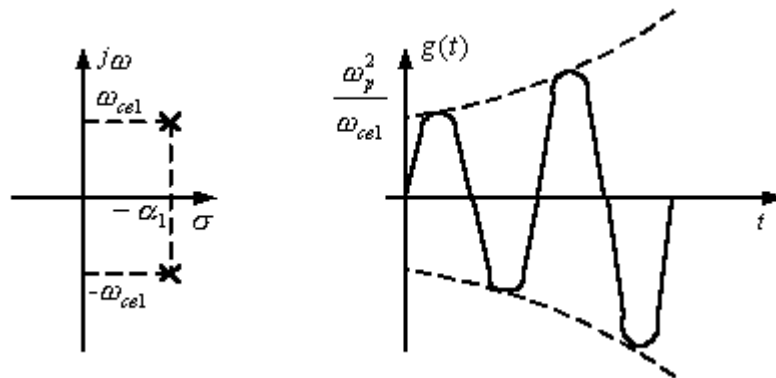
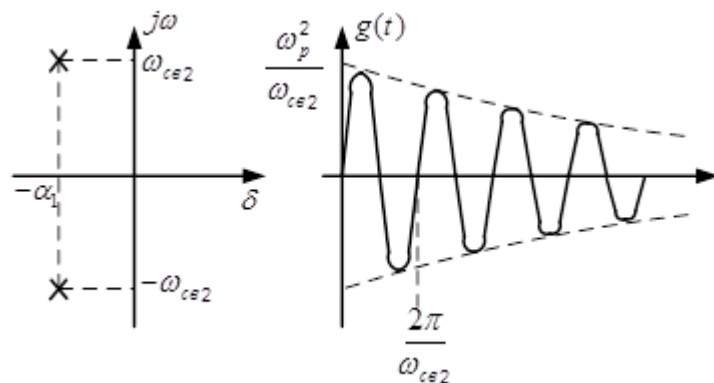


Рис.12.4.

На рисунке 12.4. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при отрицательном затухании контура ($\alpha_1 < 0 \Leftrightarrow -\alpha_1 > 0$), когда полюса передаточной функции расположены в правой полуплоскости плоскости p .

С увеличением частоты свободных колебаний $\omega_{c\epsilon}$ при том же затухании α диаграмма полюсов расширяется относительно оси абсцисс, а импульсная характеристика, сохранив ту же скорость убывания, будет иметь более высокочастотное заполнение.



$$\omega_{c\epsilon 2} > \omega_{c\epsilon 1}$$

Рис. 12.5

На рисунке 12.5. изображены диаграмма нулей и полюсов передаточной функции цепи и ее импульсная характеристика при исходном затухании $\alpha_1 > 0$ и частоте свободных колебаний $\omega_{c\epsilon 2} > \omega_{c\epsilon 1}$.

3. Признак устойчивости линейной цепи:

Из приведенных результатов следует, что, если полюса передаточной функции линейной цепи лежат в левой полуплоскости, то линейная цепь устойчива, если же полюса лежат в правой полуплоскости, то система неустойчива. Неустойчивость цепей используется в автогенераторах для формирования гармонических колебаний.

Контрольные вопросы к лекции №12

1. Используя рисунок 12.1, поясните, как по передаточной функции линейной цепи найти ее амплитудно-частотную характеристику?
2. Используя рисунок 12.1, поясните, как по передаточной функции линейной цепи найти ее фазочастотную характеристику?
3. Используя рисунок 12.1, поясните, как по передаточной функции линейной цепи найти ее переходную характеристику?
4. Используя рисунок 12.1, поясните, как по переходной характеристике линейной цепи найти ее передаточную функцию?
5. Используя рисунок 12.1, поясните, как по переходной характеристике линейной цепи найти ее амплитудно-частотную характеристику?
6. Сформулируйте признак устойчивости линейной цепи.

Типовые задачи к лекции №12

1. Передаточная функция цепи имеет два полюса $p_{п1} = -0,5+2j$, $p_{п2} = -0,5-2j$. Определите устойчива эта цепь или нет.
2. Передаточная функция цепи имеет один ноль $p_{01} = 0$ и два полюса $p_{п1} = 0,5+2j$, $p_{п2} = 0,5-2j$. Определите устойчива эта цепь или нет.
3. Передаточная функция цепи задана формулой

$$K(p) = \frac{P}{p + \alpha}$$

Определите основные характеристики цепи: КЧХ, АЧХ, ФЧХ, импульсную и переходную характеристики этой цепи.

4. Передаточная функция цепи задана формулой

$$K(p) = \frac{P}{(p + \alpha)^2}$$

Определите основные характеристики цепи: КЧХ, АЧХ, ФЧХ, импульсную и переходную характеристики этой цепи.