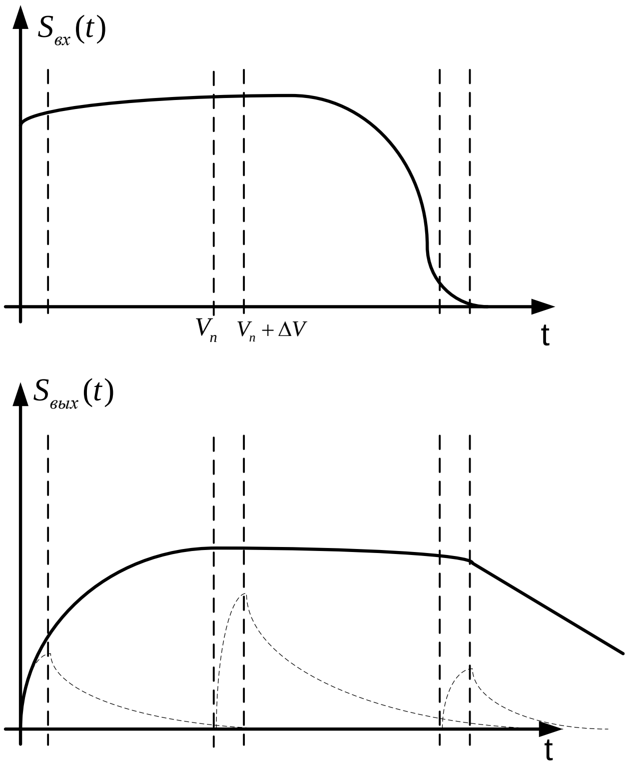
Лекция №11

([5], стр. 41-62).

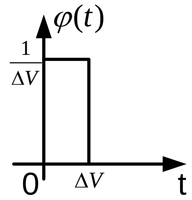
Анализ переходных процессов при нулевых начальных условиях методом интеграла наложения (свёртки, Дюамеля).

1. Содержание метода.

В основе метода лежит принцип суперпозиции (наложения). Входной сигнал можно представить в виде суммы коротких импульсов, идущих друг за другом. Амплитуды импульсов зависят от значения входного сигнала в момент прохождения очередного импульса. Затем можно найти отклик на выходе цепи от каждого импульса и, сложив эти отклики, определить выходной сигнал (см. рис. 11.1).

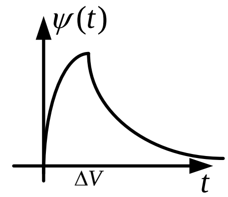


Короткий импульс:



$$S_{вх}(t) \approx \sum_{n=0}^{k} S_{вх}(V_n) \cdot \varphi(t - V_n)\Delta V,\, t = k\Delta V$$

Отклик от импульса:



$$S_{вых}(t) \approx \sum_{n=0}^{k} S_{вх}(V_n) \cdot \psi(t - V_n)\Delta V$$

Рис. 11.1

Устремим ΔV к нулю, для увеличения точности представления входного сигнала. Тогда короткий импульс $\varphi(t)$ выродится в дельта- функцию $\delta(t)$, а элементарный отклик $\psi(t)$ - в импульсную характеристику $g(t)$

$$\begin{cases} \varphi(t) \to \delta(t) \\ \psi(t) \to g(t) \\ V_n \to V \qquad \Rightarrow S_{вых}(t) = \int\limits_0^t S_{вх}(V) \cdot g(t - V)dV \\ \Delta V \to dV \\ \sum \to \int \\ k\Delta V = t \end{cases}$$

Следовательно, выходной сигнал можно определить с помощью интеграла $S_{вых}(t) = \int\limits_0^t S_{вх}(t) \cdot g(t-V)dV$, который называется интегралом свёртки.

Если входной сигнал задан до момента времени t=0, то более общей будет следующая формула интеграла свёртки:

$$S_{вых}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} S_{вх}(V) \cdot g(t-V)dV$$

В этих формулах $S_{вх}(t)$ - входной сигнал, $g(t)$ - импульсная характеристика цепи - отклик на воздействие в виде δ-функции.

2. Способы нахождения импульсной характеристики.

а) По передаточной функции цепи.

Вспомним, что если входной сигнал – дельта функция, то выходной сигнал – импульсная характеристика. Тогда преобразование Лапласа от входного сигнала равно единице, а преобразование Лапласа от выходного сигнала – передаточная функция

$$S_{вх}(t) = \delta(t) \to g(t) = S_{вых}(t)$$

ППЛ ОПЛ

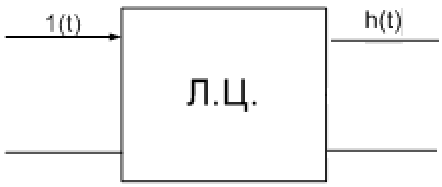
$$S_{вх}(p) = 1 \to 1 \cdot K(p) = \hat{S}_{вых}(p)$$

Вывод: $g(t) \doteq K(p)$, то есть для определения импульсной характеристики нужно вычислить обратное преобразование Лапласа от передаточной функции цепи.

б) По переходной характеристике цепи.

Переходной характеристикой $h(t)$цепи называется отклик на выходе цепи, когда на вход действует единичная функция Хевисайда: 1(t).

$$\frac{d \cdot 1(t)}{dt} = \delta(t) \Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} = g(t)$$



Следовательно, импульсную характеристику можно получить с помощью вычисления производной от переходной характеристики цепи.

в) Экспериментальное определение импульсной характеристики.

Для экспериментального определения надо подать на вход цепи короткий импульс, длительность которого намного меньше постоянной времени цепи.

3. Пример анализа переходных процессов с помощью интеграла свертки

На вход RC цепочки (рис.11.2) подан одиночный прямоугольный импульс (рис.11.3). Найти напряжение на конденсаторе при условии, что напряжение на нем в момент подачи импульса равно нулю (при нулевых начальных условиях).

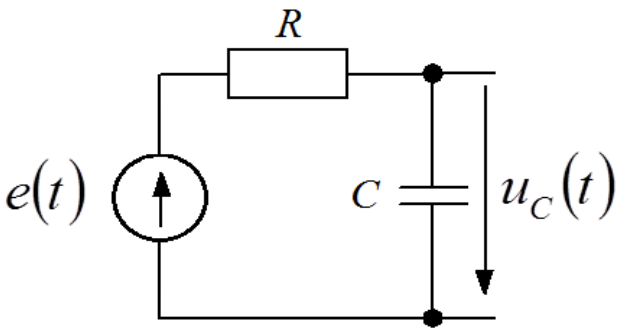


Рис. 11.2

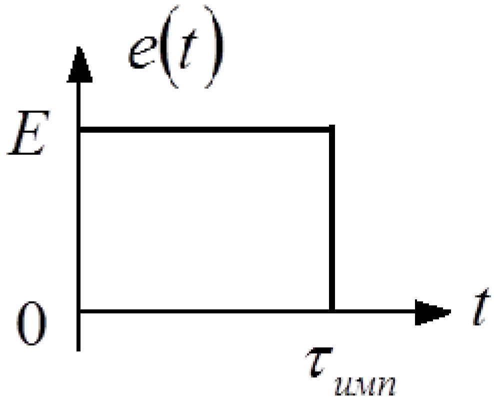


Рис 11.3

Дано:

R, C

$u_C(0) = 0$

$e(t) = E \cdot 1(t) - E \cdot 1(t - \tau_u)$

где τ_u - длительность импульса

Найти $u_C(t)$

Решение:

1. Найдём импульсную характеристику цепи по её передаточной функции:

$$K(p) = \frac{1}{p\tau_0 + 1}; \tau_0 = RC; p_{n1} = \frac{-1}{\tau_0}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\omega}^{C+j\omega} K(p) e^{pt} dp = res_1$$

$$res_1 = \lim_{p \to -\frac{1}{\tau_0}} \frac{1}{p\tau_0 + 1} e^{pt} (p + \frac{1}{\tau_0}) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \cdot 1(t)$$

$$g(t) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \cdot 1(t)$$

2. Найдём выходной сигнал, вычислив интеграл свёртки:

Сначала изобразим график функции $g(t-V)$. Это поможет правильно вычислить интеграл свертки $S_{вых}(t)=\int_0^t S_{вх}(V)g(t-V)dV$. Графики функций $g(t)$, $g(-V)$ и $g(t-V)$ изображены последовательно на рисунках 11.4, 11.5 и 11.6.

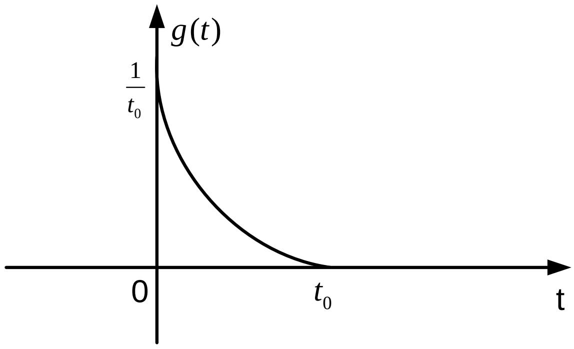


Рис.11.4

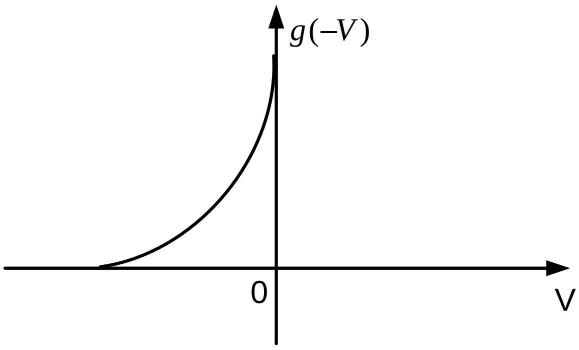


Рис. 11.5

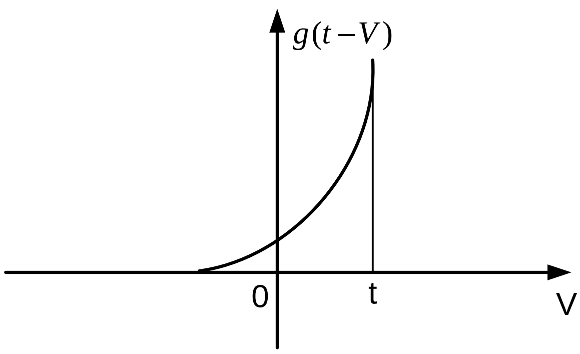
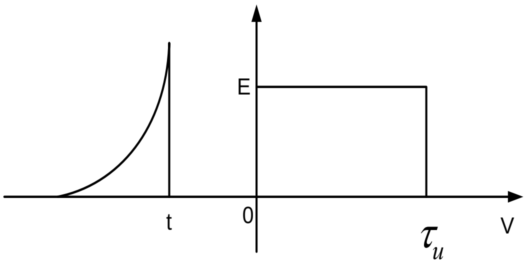


Рис.11.6.

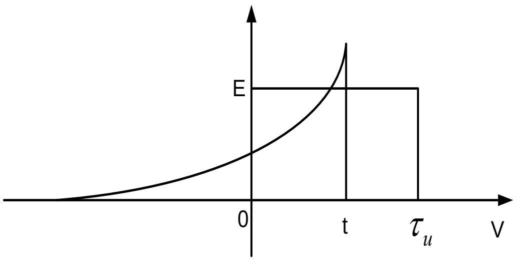
Теперь вычислим интеграл свертки. Он будет вычисляться по разным формулам в зависимости от промежутка времени

1. $t < 0$



$S_{вых}(t) = 0$, т.к. произведение функций под интегралом свёртки равно нулю.

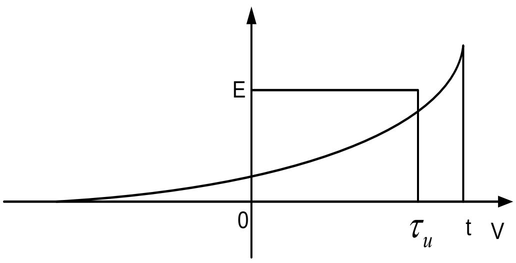
2. $0 \le t \le \tau_и$



$$S_{вых1}(t) = \int_0^t E\frac{1}{\tau_0}e^{-\frac{t-V}{\tau_0}}dV = \frac{E}{\tau_0}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_0^t e^{\frac{V}{\tau_0}}dV = \frac{E}{\tau_0}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\cdot\left.\frac{e^{\frac{V}{\tau_0}}}{\frac{1}{\tau_0}}\right|_0^t =$$

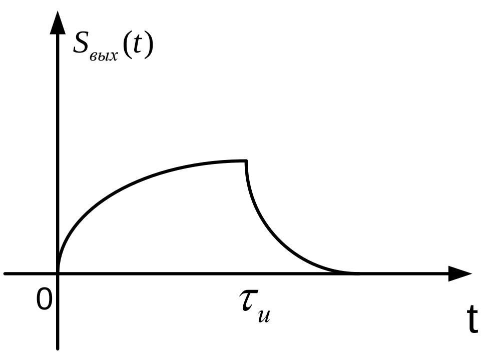
$$= Ee^{\frac{-t}{\tau_0}}(e^{\frac{t}{\tau_0}}-1) = E(1-e^{\frac{-t}{\tau_0}})(1(t)-1(t-\tau_и))$$

3. $t \ge \tau_и$



$$S_{вых2}(t) = \int_0^{\tau_и} E\frac{1}{\tau_0}e^{-\frac{t-V}{\tau_0}}dV = \frac{E}{\tau_0}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left.\frac{e^{\frac{V}{\tau_0}}}{\frac{1}{\tau_0}}\right|_0^{\tau_и} =$$

$$= Ee^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(e^{\frac{\tau_и}{\tau_0}}-1\right)\cdot 1(t-\tau_и)$$



$u_C(t) = S_{вых}(t) = S_{вых1}(t) + S_{вых2}(t)$. Тогда

$$u_C(t) = E\left(\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)(1(t)-1(t-\tau_и)) + e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(e^{\frac{\tau_и}{\tau_0}}-1\right)\cdot 1(t-\tau_и)\right) =$$

$$= E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)\cdot 1(t) - E\left(1-e^{-\frac{t-\tau_и}{\tau_0}}\right)\cdot 1(t-\tau_и)$$

Сравним полученный результат с решением этого же примера операторным методом, приведенным в лекции 10. Как и следовало ожидать, результат совпадает.

Примечание

Можно решить этот пример и не используя интеграл свёртки. Для этого найдём переходную характеристику цепи. Поскольку $g(t)=\dfrac{dh}{dt}$, то $h(t)=\int\limits_0^t g(v)dv$.

В решаемом примере $g(t)=\dfrac{1}{\tau_0}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\cdot 1(t)$.

Тогда $h(t)=\dfrac{1}{\tau_0}\int\limits_0^t e^{-\frac{v}{\tau_0}}dv=\dfrac{1}{\tau_0}\cdot\left.\dfrac{e^{-\frac{v}{\tau_0}}}{-\dfrac{1}{\tau_0}}\right|_0^t=-\left(e^{-\frac{t}{\tau_0}}-1\right)\cdot 1(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)\cdot 1(t)$.

Но $e(t)=E\cdot 1(t)-E\cdot 1(t-\tau_u)$. Используя определение переходной характеристики, имеем

$u_C(t)=Eh(t)-Eh(t-\tau_u)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)\cdot 1(t)-E\left(1-e^{-\frac{t-\tau_u}{\tau_0}}\right)\cdot 1(t-\tau_u)$.

Как и следовало ожидать, результат опять совпадает.

Контрольные вопросы к лекции №11

1. В чем суть метода интеграла наложения?
2. Дайте определение импульсной характеристике линейной цепи.
3. Дайте определение переходной характеристике линейной цепи.
4. Как найти импульсную характеристику, если известна передаточная функция цепи?
5. Как найти импульсную характеристику, если известна переходная характеристика цепи?
6. Как экспериментально определить импульсную характеристику цепи?
7. Вычислите импульсную характеристику CR-цепи, у которой выходной сигнал снимается с резистора.
8. Вычислите импульсную характеристику последовательного RLC- контура, у которого выходной сигнал снимается с конденсатора.

Типовые задачи к лекции 11

1. Используя метод интеграла свертки, определите при нулевых начальных условиях напряжение на резисторе CR-цепи, если напряжение источника напряжения меняется по закону E(t)=E·1(t).

2. Используя метод интеграла свертки, определите при нулевых начальных условиях напряжение на резисторе LR-цепи, если напряжение источника напряжения меняется по закону E(t)=E·1(t).

3. На вход CR цепи подан прямоугольный импульс. Найти изменение напряжения на резисторе методом интеграла свертки при условии, что напряжение на конденсаторе в момент подачи импульса равно 0 (при нулевых начальных условиях).

4. На вход RL цепи подан прямоугольный импульс. Найти изменение напряжения на индуктивности методом интеграла свертки при нулевых начальных условиях.