Лекция №10

([2], стр. 37-42; [5], стр.34-42)

Определение сигнала по изображению (вычисление обратного преобразования Лапласа)

1. Вычисление обратного преобразования Лапласа.

Сигнал по изображению находится с помощью обратного преобразования по Лапласу:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \hat{Y}(p) e^{pt} dp = \sum_i res_i$$

Обычно вычисление интеграла заменяется вычислением вычетов по полюсам функции: $\hat{Y}(p)$

$$\hat{Y}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + ... + a_0}{b_m p^m + ... b_0}, \text{ где } n < m.$$

Полюсами функции $\hat{Y}(p)$ называют значения переменной p, при которых знаменатель $B(p)$ обращается в 0.

$$B(p) = 0 \Rightarrow P_n, n = 1..., m$$

Вычеты можно вычислить только в том случае, если максимальная степень полинома числителя меньше максимальной степени полинома знаменателя т.е. *n* < *m* !!!

Например, для изображения $\hat{Y}(p) = \dfrac{p^2}{p^2+1}$ вычислить обратное преобразование с помощью вычетов нельзя, т.к. $n = m$, а для изображения $\hat{Y}(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ можно, т.к. $n < m$.

Если условие ($n < m$) не выполняется, то надо выделить целую часть из дроби.

<u>Пример.</u>

Найдите обратное преобразование Лапласа функции $\hat{Y}(p) = \dfrac{p^2}{p^2+1}$.

<u>Решение.</u>

Выделим целую часть дроби. Тогда $\hat{Y}(p) = \dfrac{p^2}{p^2+1} = \dfrac{p^2+1-1}{p^2+1} = 1 - \dfrac{1}{p^2+1}$.

Обратное преобразование Лапласа от единицы есть дельта функция, т.е. $\dot{\delta}(t) \doteq 1$. Обратное преобразование Лапласа от функции $\hat{Y}_1(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$ найдем по таблице преобразований Лапласа. Это будет функция $y_1(t) = \sin t \cdot 1(t)$, т.е.

$sin\,t \cdot 1(t) \doteq \frac{1}{p^2+1}$. Используя свойство линейности, найдем обратное преобразование от заданной функции $y(t) = \delta(t) - \sin t \cdot 1(t)$.

2. Определение вычетов по полюсам.

1. Полюса простые, первой кратности (кратность – количество повторений корня).

$res_i = \lim\limits_{P \to P_{ni}} \hat{Y}(p)(p - p_{ni})e^{pt}$, где p_{ni} - полюс, значение переменной р, при котором знаменатель функции $\hat{Y}(p)$ обращается в ноль.

Пример**.**

Найдите обратное преобразование Лапласа функции $\hat{Y}(p) = \frac{1}{p+a}$.

Решение:

Найдём полюс функции $\hat{Y}(p)$

$p + a = 0$; $p = -a$.

Тогда $y(t) = res_1 = \lim\limits_{p \to -a} \frac{1}{p+a}(p+a)e^{pt} = e^{-at} \cdot 1(t)$

Пример**.**

Найдите обратное преобразование Лапласа функции $\hat{Y}(p) = \frac{1}{p^2 - 0{,}25}$.

Решение:

Найдём полюса функции $\hat{Y}(p)$

$p^2 - 0{,}25 = 0$

$p_{n1} = 0{,}5, p_{n2} = -0{,}5$

$$res_1 = \lim_{p \to 0,5} \frac{p-0{,}5}{p^2-0{,}25}e^{pt} = \lim_{p \to 0,5} \frac{1(p-0{,}5)}{(p-0{,}5)(p+0{,}5)}e^{pt} = \frac{1}{1}e^{0,5t}1(t)$$

$$1(t) = \begin{cases} 1, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$res_2 = \lim_{p \to -0,5} \frac{(p+0{,}5)}{(p-0{,}5)(p+0{,}5)}e^{pt} = \frac{1}{-1}e^{-0,5t}1(t) = -e^{-0,5t}1(t)$$

$$Y(t) = res_1 + res_2 = (e^{0,5t} - e^{-0,5t})1(t)$$

2. Вычисление вычетов по паре комплексно-сопряжённых полюсов.

$p_{ni} = \alpha + j\beta;$

$p_{ni} = \alpha - j\beta;$

Если полюса комплексно – сопряженные, то для каждой пары комплексно – сопряженных полюсов, сразу же находится сумма двух вычетов по формуле:

$$res_i + res_{i+1} = 2\,Re\left\{lim\left(\left(p - p_{ni}\right)e^{pt}\,\hat{Y}\left(p\right)\right)\right\}$$

Пример**.**

Найдите обратное преобразование Лапласа функции $\hat{Y}(p) = \dfrac{1}{p^2 + 0{,}25}$.

Решение:

Найдём полюса функции $\hat{Y}(p)$

$p^2 + 0{,}25 = 0$; $p^2 = -0{,}25$; $p_{n1} = 0{,}5j, p_{n2} = -0{,}5j$

Тогда

$$y(t) = res_1 + res_2 = 2\,Re\left(\lim_{p\to 0{,}5j}\frac{1}{(p+0{,}5j)(p-0{,}5j)}(p-0{,}5j)e^{pt}\right) == 2\,Re\left(\frac{e^{0{,}5jt}}{j}\right)\cdot 1(t) =$$

$$= 2\,Re\left(\frac{cos\,0{,}5t + j\,sin\,0{,}5t}{j}\right)\cdot 1(t) = 2(sin\,0{,}5t)\cdot 1(t)$$

3. Вычисление вычетов по полюсам кратности *k*.

$$res_i = \lim_{p\to p_{ni}}\left\{\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\left(\hat{Y}(p)e^{pt}\left(p - p_{ni}\right)^k\right)\right\}$$, где *k* – кратность полюса.

Пример.

Найдите обратное преобразование Лапласа функции $\hat{Y}(p) = \dfrac{1}{(p+a)^2}$.

Решение:

Найдём полюса функции $\hat{Y}(p)$

$p_{n1} = p_{n2} = -a$; $k = 2$, k – кратность полюса.

$$res_1 = \lim_{p\to -a}\left\{\frac{d}{dp}\frac{1}{\left(p+a\right)^2}e^{pt}\left(p-(-a)\right)^2\right\} = \lim_{p\to -a}\frac{d}{dp}e^{pt} = \lim_{p\to -a}te^{pt} = te^{-at}1\left(t\right)$$

Тогда $y(t) = res_1 = te^{-at}\cdot 1(t)$

4. Разложение изображения по Лапласу на простые дроби.

Для упрощения вычисления обратного преобразования Лапласа удобно разложить функцию $\hat{Y}(p)$ на простые дроби:

$$\hat{Y}(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{A(p)}{(p-p_{n1})(p-p_{n2})...(p-p_{nm})}=\frac{A_1}{p-p_{n1}}+\frac{A_2}{p-p_{n2}}+...+\frac{A_m}{p-p_{nm}}$$

, где $A_1...A_m$ - некоторые коэффициенты, $p-p_{nm}$ - полюса.

Для определения коэффициентов $A_1...A_m$ следует:

1. Привести сумму простых дробей к общему знаменателю.
2. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях числителя исходной функции и числителя, полученного после привидения к общему знаменателю.
3. Найти коэффициенты $A_1...A_m$, решив систему из m уравнений с m неизвестными.

Пример.

Найдите обратное преобразование Лапласа функции $\hat{Y}(p)=\frac{p+4}{p^2-3p+2}$

Решение:

Найдем полюса заданной функции, а затем разложим ее на простые дроби. Тогда

$$p^2-3x+2=0$$

$$p_{n1}=1$$

$$p_{n2}=2$$

$$\frac{p+4}{p^2-3p+2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}=\frac{Ap-2A+Bp-B}{(p-1)(p-2)}$$

$$\left.\begin{cases}A+B=1\\-2A-B=4\end{cases}\right| + \Rightarrow \quad \begin{cases}A=-5\\B=6\end{cases}$$

$$\frac{p+4}{p^2-3x+2}=\frac{-5}{p-1}+\frac{6}{p-2}$$

$$\frac{1}{p+a}\doteqdot e^{-at}\cdot 1(t)$$

$$y(t)=-5e^{-(-1)t}\cdot 1(t)+6e^{-(-2)t}\cdot 1(t)=(-5e^{t}+6^{2t})\cdot 1(t)$$

Пример анализа переходного процесса с помощью операторного метода.

На вход RC цепочки (рис10.1) подают одиночный прямоугольный импульс (рис.10.2). Найти изменение напряжения на конденсаторе при условии, что напряжение на нем в момент подачи импульса равно 0 (при нулевых начальных условиях).

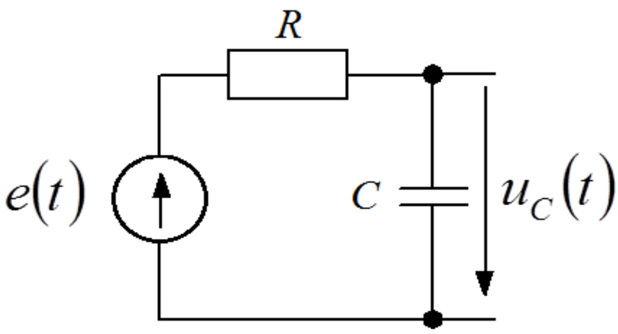


Рис. 10.1

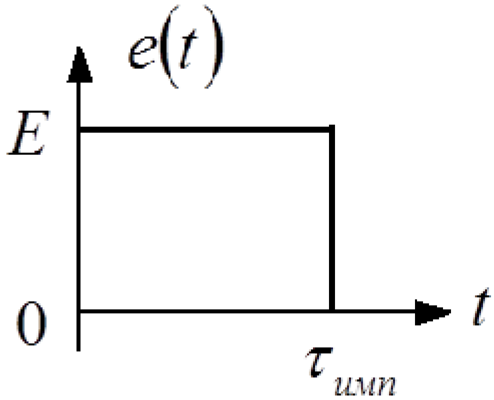


Рис 10.2

Дано:

R, C

$u_C(0) = 0$

$e(t) = E \cdot 1(t) - E \cdot 1(t - \tau_и)$

где $\tau_и$ - длительность импульса

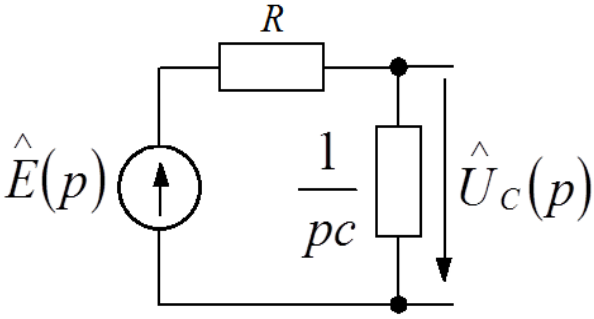
Найти $u_C(t)$

Решение:

1) При нулевых начальных условиях будем решать задачу с использованием передаточной функции цепи. Найдём передаточную функцию по комплексной частотной характеристике:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_0} \Rightarrow K(p) = \frac{1}{1 + p\tau_0}, \text{ где } \tau_0 = RC$$

Можно найти передаточную функцию и по схеме замещения цепи, которая приведена на рисунке 10.3.



$$K(p) = \frac{\frac{1}{pc}}{R + \frac{1}{pc}} = \frac{1}{pRC + 1} = \frac{1}{p\tau_0 + 1}$$

Рис 10.3

При решении задачи используем принцип суперпозиции. Для этого представим входной сигнал в виде суммы более простых сигналов, затем, найдя отклик от каждого из простых сигналов и сложив их, определим искомый выходной сигнал.

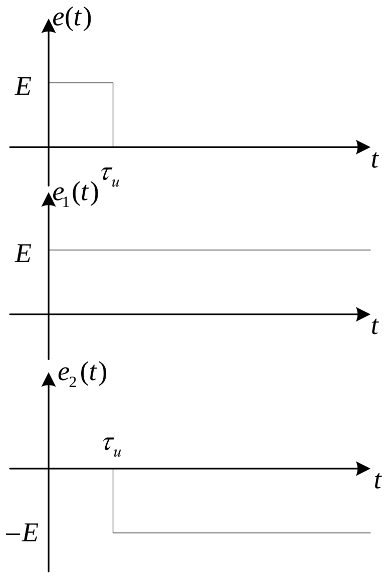


Рис 10.4

Из рисунка 10.4 следует, что $e(t)=e_1(t)-e_2(t)=E\cdot 1(t)-E\cdot 1(t-\tau_и)$.

2) Найдём изображение по Лапласу элементарного входного сигнала:

$e_1(t)=E\cdot 1(t)$, тогда $\hat{E}_1(p)=E\cdot\dfrac{1}{p}$.

3) Найдём изображение по Лапласу 1-го элементарного отклика:

$$\hat{U}_{C_1}(p)=\hat{E}_1(p)K(p)=\frac{E}{p(p\tau_0+1)}$$

4) Найдём отклик от 1-го элементарного сигнала с помощью обратного преобразования Лапласа. Для этого найдём вычеты:

$$U_{C_1}(p)=res_1+res_2$$

$$p_{n1}=0$$

$$p_{n2}=-\frac{1}{\tau_0}$$

$$res_1=\lim_{p\to 0}\frac{Ee^{pt}}{p(p\tau_0+1)}p=E\cdot 1(t)$$

$$res_2=\lim_{p\to -\frac{1}{\tau_0}}\frac{Ee^{pt}(p+\frac{1}{\tau_0})}{p(p\tau_0+1)}=\frac{E}{\tau_0}e^{\frac{-t}{\tau_0}}\frac{1}{\frac{-1}{\tau_0}}\cdot 1(t)=-Ee^{-\frac{t}{\tau_0}}\cdot 1(t)$$

$$U_{C_1}(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right) \cdot 1(t)$$

$U_{C_2}(t) = -U_{C_1}(t - \tau_u)$, тогда (см. рис. 10.5)

$$U_C(t) = U_{C_1}(t) + U_{C_2}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}) \cdot 1(t) - E(1 - e^{-\frac{t-\tau_u}{\tau_0}}) \cdot 1(t - \tau_u)$$

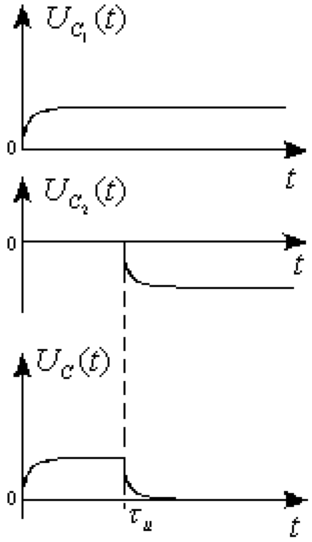


Рис. 10.5

Из полученных результатов следует, что на промежутке от 0 до τ_u конденсатор заряжается и напряжение на нем растет по экспоненте, а на $(\tau_u; +\infty)$ - разряжается, напряжение падает по экспоненте.

Контрольные вопросы к лекции №10

1. От каких выражений можно определять обратное преобразование Лапласа с помощью вычетов?
2. Дайте определение полюсу передаточной функции.
3. Приведите формулу для вычисления вычета по простым полюсам.
4. Приведите формулу для вычисления вычета по комплексно-сопряженным полюсам.
5. Приведите формулу для вычисления вычета по кратным полюсам.
6. Как разложить изображение по Лапласу на простые дроби?
7. Для чего проводится такое разложение?
8. Изложите алгоритм анализа переходных процессов операторным методом. Приведите пример.

Типовые задачи к лекции 10

1. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{1}{p^2 + 5p + 4}$.

2. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{p}{p^2 + 5p + 4}$.

3. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{p^2}{p^2 + 5p + 4}$.

4. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{p}{p^2 + 4}$.

5. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{2}{p^2 + 4}$.

6. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{p}{(p + 4)^2}$.

7. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{p + 2}{p^2 + 5p + 4}$.

8. Определите сигнал s(t) по его изображению $\hat{S}(p) = \dfrac{p^2 + 6p + 6}{p^2 + 5p + 4}$.

9. На вход CR цепи подан прямоугольный импульс. Найти изменение напряжения на резисторе операторным методом при условии, что напряжение на конденсаторе в момент подачи импульса равно 0 (при нулевых начальных условиях).