Лекция № 9.

Составление операторного уравнения на основе принципиальной схемы цепи ([2], стр. 42-48; [5], стр. 27-34).

1. <u>Замещение пассивных двухполюсников.</u>

Операторное уравнение цепи необходимо для анализа переходных процессов операторным методом. При составлении операторного уравнения на основе принципиальной схемы цепи в самой схеме происходит замена реальных элементов цепи на их операторные эквиваленты.

Установим связь между токами и напряжениями на пассивных элементах и их операторными изображениями. Это позволит найти операторные эквиваленты пассивных элементов. Для этого мы будем использовать свойства преобразования Лапласа, разобранные в предыдущей лекции.

Резистор

Используя свойство линейности, перейдем от функций времени к их изображениям. Тогда получим

$$R: U_R(t) = R i_R(t) \doteq \hat{U}_R(p) = R\hat{I}_R(p)$$

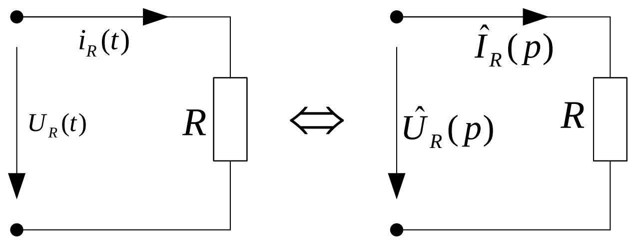


Рис. 9.1

Таким образом, в операторной схеме замещения резистор остается резистором (см.рис.9.1).

Конденсатор

Используя свойство дифференцирования оригинала, перейдем от функций времени к их изображениям. Тогда получим

$$i_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt} \doteq \hat{I}_C(p) = C\left(p\hat{U}_C(p) - U_C(0)\right)$$

$$\hat{I}_C(p) = pC\hat{U}_C(p) - CU_C(0)$$

$$\hat{U}_C(p) = \frac{1}{pC}\hat{I}_C(p) + \frac{U_C(0)}{p}$$

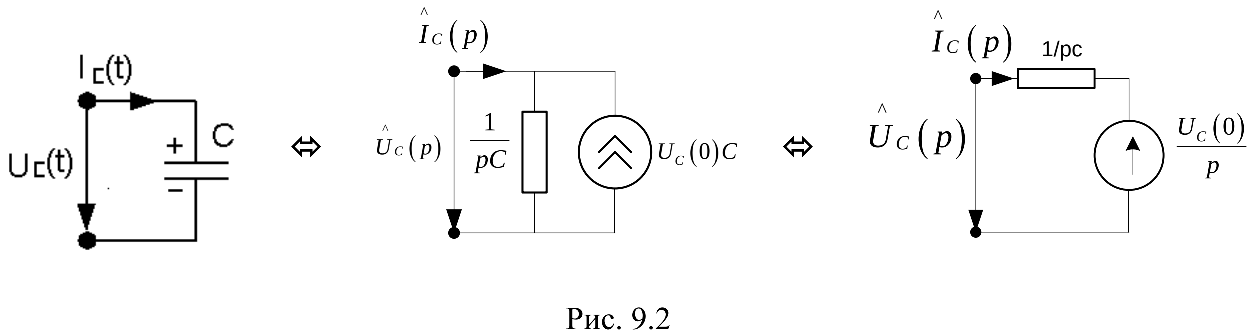


Рис. 9.2

Таким образом, конденсатор при ненулевых начальных условиях заменяется в схеме замещения на операторное емкостное сопротивление $\frac{1}{pC}$ и источник тока $U_C(0)C$ или источник напряжения $\frac{U_C(0)}{p}$, где $U_C(0)$- значение напряжения на конденсаторе в нулевой момент времени (см.рис.9.2). При нулевых начальных условиях, когда на ёмкости в момент коммутации нет заряда, ёмкость заменяется только на емкостное операторное сопротивление.

Индуктивность

Используя свойство дифференцирования оригинала, перейдем от функции времени к их изображениям. Тогда получим

$$U_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \doteq \hat{U}_L(p) = pL\hat{I}_L(p) - Li_L(0)$$

$$\hat{I}_L(p) = \frac{\hat{U}_L(p)}{pL} + \frac{i_L(0)}{p}$$

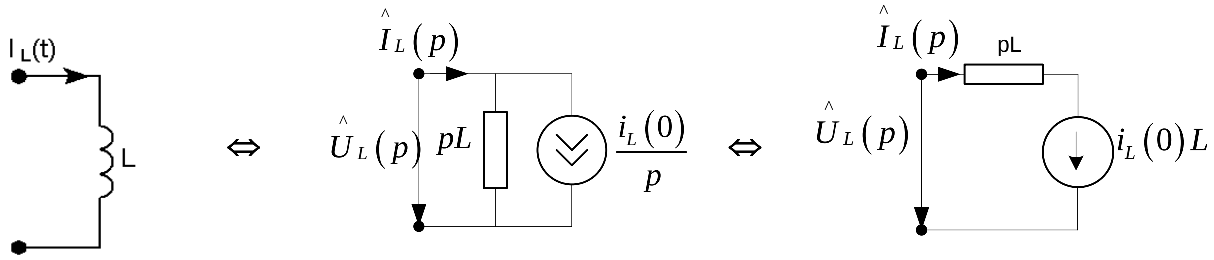


Рис. 9.3

При ненулевых начальных условиях катушка индуктивности заменяется в схеме замещения на операторное индуктивное сопротивление pL и независимый источник тока $\frac{i_L(0)}{L}$ или источник напряжения $i_L(0)p$, где $i_L(0)$ - ток через индуктивность в нулевой момент времени (см.рис.9.3). При нулевых начальных условиях, когда в момент коммутации ток через индуктивность равен нулю, индуктивность заменяется на операторное индуктивное сопротивление pL.

Пример.

Для заданной схемы (рис.9.4) составить и решить операторное уравнение относительно $u_{R2}(t)$.

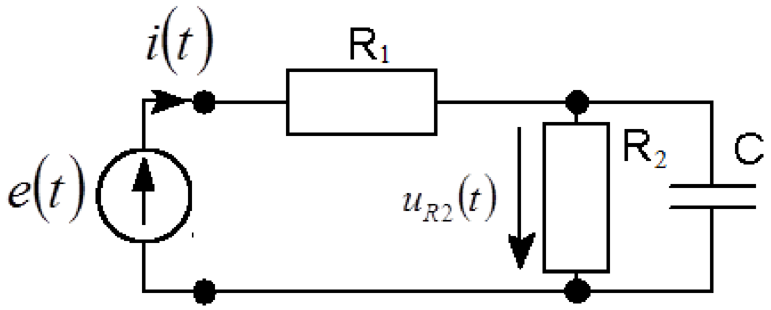


Рис.9.4

Решение

Составим схему замещения (см.рис.9.5)

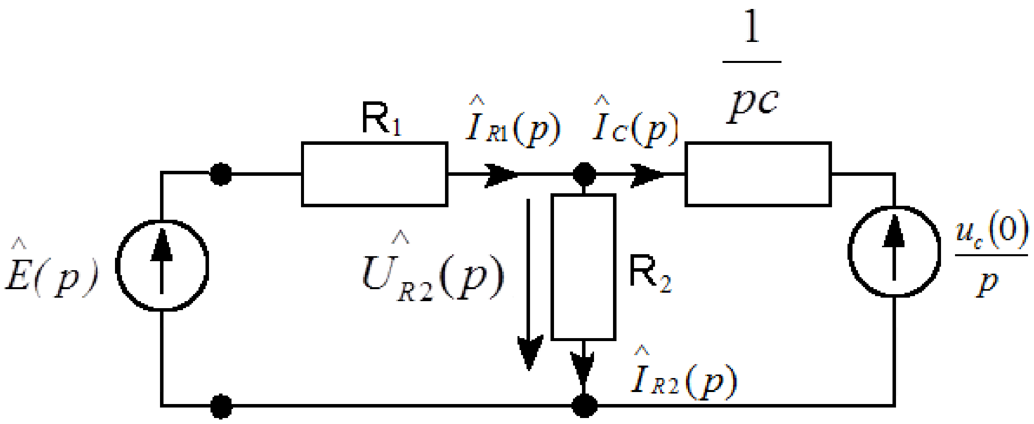


Рис.9.5

Используя эту схему, запишем уравнение Кирхгофа для узла

$\hat{I}_{R1}(p)=\hat{I}_{R2}(p)+\hat{I}_C(p)$

Запишем токи ветвей через операторные узловые напряжения

$$\frac{\hat{E}(p)-\hat{U}_{R2}(p)}{R_1}=\frac{\hat{U}_{R2}(p)}{R_2}+\frac{\hat{U}_{R2}(p)-\frac{u_C(0)}{p}}{\frac{1}{pc}}.$$

Решая это уравнение относительно $\hat{U}_{R2}(p)$, последовательно получим

$$\hat{U}_{R2}(p)\cdot pc-u_C(0)\cdot c+\frac{\hat{U}_{R2}(p)}{R_2}=\frac{\hat{E}(p)-\hat{U}_{R2}(p)}{R_1}.$$

$\hat{U}_{R2}(p)\left(pc+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{\hat{E}(p)}{R_1}+u_C(0)\cdot c$ и окончательно

$$\hat{U}_{R2}(p)=\left(\frac{\hat{E}(p)}{R_1}+u_C(0)\cdot c\right)\cdot\frac{1}{pc+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

Если на конденсаторе в нулевой момент времени напряжения не будет, т.е. начальные условия нулевые, то $u_C(0)=0$ и уравнение примет вид:

$$\hat{U}_{R2}(p)=\frac{\hat{E}(p)}{R_1}\cdot\frac{1}{pc+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}},$$

$$\hat{U}_{R2}(p)=\frac{\hat{E}(p)}{pcR_1+1+\frac{R_1}{R_2}},$$

Тогда $\dfrac{\hat{U}_{R2}(p)}{\hat{E}(p)}=\dfrac{1}{p\tau_1+1+\frac{R_1}{R_2}}$, где $\tau_1=cR_1$.

Это передаточная функция цепи, когда в качестве реакции рассматривается напряжение на резисторе R_2:

$$K(p)=\frac{1}{p\tau_1+1+\frac{R_1}{R_2}}.$$

Передаточной функцией K(p) линейной цепи называется отношение изображения по Лапласу реакции к изображению по Лапласу воздействия, заданного в общем виде, при нулевых начальных условиях. Под реакцией понимается сигнал на клеммах любого пассивного двухполюсника схемы, который рассматривается в качестве нагрузки. Реакцией цепи на нагрузке может быть ток или напряжение (в данном примере напряжение на резисторе R_2). Под входным сигналом понимается функция, описывающая ЭДС источника напряжения, или ток источника тока подключённого к входным клеммам (в данном примере $e(t)$). Передаточная функция определяется по схеме замещения цепи при нулевых начальных условиях. Она (то есть отношение двух изображений по Лапласу) зависит только от принципиальной схемы цепи. Если начальные условия нулевые и передаточная функция четырёхполюсника известна, то изображение по Лапласу выходного сигнала можно найти по формуле

$$\hat{U}_{R_2}(p)=\hat{E}(p)K(p).$$

2. <u>Определение передаточной функции цепи.</u>

1 способ:

По схеме замещения цепи при нулевых начальных условиях (см. предыдущий пример).

2 способ:

По КЧХ цепи.

Если известна КЧХ линейной цепи, то для получения передаточной функции достаточно в КЧХ заменить $j\omega$ на p.

Эти способы отображены на схеме (см. рис. 9.6).

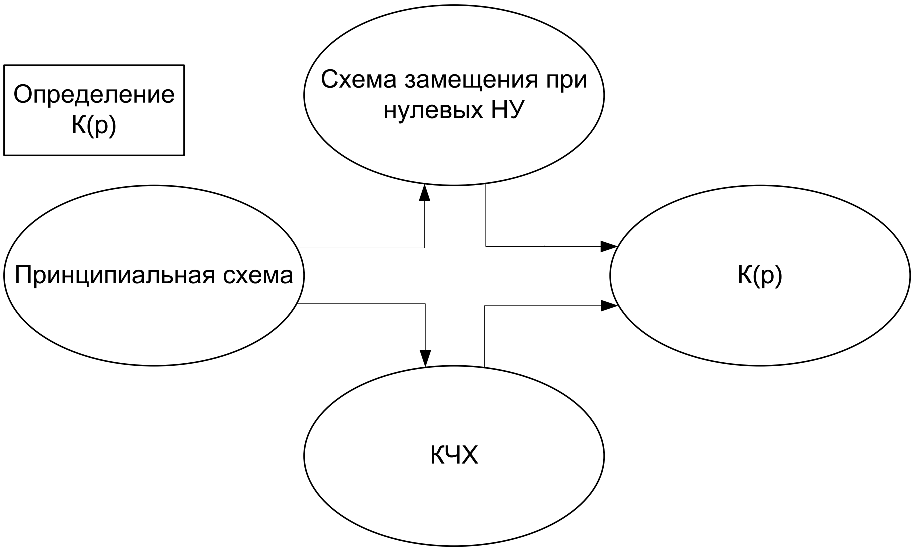
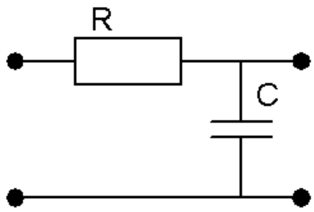


Рис. 9.6

Пример.



Найдите передаточную функцию RC цепи (рис.9.7) по ее

Рис.9.7

комплексно-частотной характеристике.

Решение.

Здесь под воздействием понимается напряжение на входных клеммах, а под откликом – напряжение на конденсаторе. КЧХ заданной цепи:

$K(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega\tau_0}; \tau_0 = RC$ (см. лекцию 4). Передаточную функцию получим,

заменив $j\omega$ на ρ. Тогда $K(p)=\dfrac{1}{p\tau_0+1}$.

На самостоятельную проработку:

Найдите передаточную функцию последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой (см. рис. 9.8).

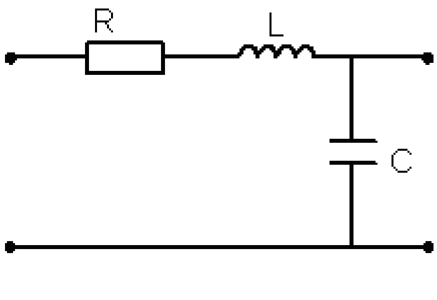


Рис.9.8

3. Алгоритм анализа переходных процессов с помощью преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Алгоритм можно представить в виде схемы

$$_{\text{вх}}(t) \xrightarrow{1} \hat{S}_{\text{вх}}(p) \xrightarrow{2} \hat{S}_{\text{вых}}(p) = \hat{S}_{\text{вх}}(p) \cdot K(p) \xrightarrow{3} S_{\text{вых}}(t).$$

То есть задача анализа переходного процесса решается за три шага:

1-й шаг: вычислить прямое преобразование Лапласа $\hat{S}_{\text{вх}}(p)$ от воздействия $S_{\text{вх}}(t)$.

2-й шаг: по принципиальной схеме найти передаточную функцию цепи $K(p)$, умножить на эту передаточную функцию изображение по Лапласу воздействия $\hat{S}_{\text{вх}}(p)$ и найти изображение по Лапласу отклика $\hat{S}_{\text{вых}}(p)$.

3-й шаг: определить отклик $S_{\text{вых}}(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа от функции $\hat{S}_{\text{вых}}(p)$.

Контрольные вопросы к лекции №9

1. Для чего составляется операторное уравнение цепи?
2. На что заменяется резистор в схеме замещения при ненулевых начальных условиях?
3. На что заменяется резистор в схеме замещения при нулевых начальных условиях?
4. На что заменяется конденсатор в схеме замещения при ненулевых начальных условиях?
5. На что заменяется конденсатор в схеме замещения при нулевых начальных условиях?
6. На что заменяется индуктивность в схеме замещения при ненулевых начальных условиях?
7. На что заменяется индуктивность в схеме замещения при нулевых начальных условиях?
8. Дайте определение передаточной функции цепи.
9. Назовите два способа определения передаточной функции цепи.
10. Изобразите схему анализа переходных процессов с помощью преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Типовые задачи к лекции №9

1. Найдите передаточные функции RL и LR-цепей.
2. Найдите передаточную функцию последовательного колебательного контура с резистивной, емкостной и индуктивной нагрузкой.
3. Изобразите два варианта схемы замещения последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой, если $U_C(0) = U_0$, $I_L(0) = 0$
4. Изобразите два варианта схемы замещения последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой, если $U_C(0) = 0$, $I_L(0) = I_0$.