Лекция №8
Переходные процессы ([2], стр. 29-61; [5], стр. 22-42.

Постановка задачи.

В повседневной практике мы встречаемся с коммутацией цепей и сигналами конечной длительности. Переходные процессы возникают в момент коммутации цепи и в моменты начала и окончания сигнала, которые тоже можно считать моментами коммутации цепи. На рисунке 8.1. изображена схема, иллюстрирующая коммутации цепи. К цепи подключено постоянное напряжение $E(t) = E$.

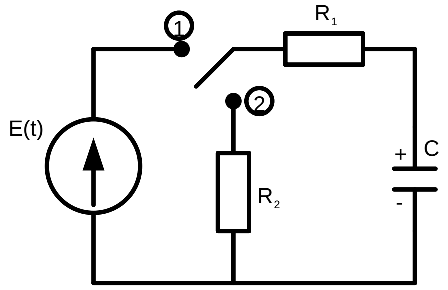


Рис.8.1.

Заряд:

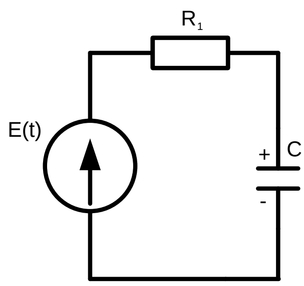


Рис.8.2

Разряд:

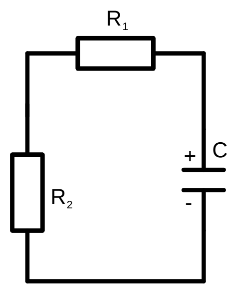


Рис.8.3

В нулевой момент времени замкнем ключ на клемму 1. Тогда конденсатор начинает заряжаться. Ток заряда протекает последовательно через резистор R_1 и конденсатор С и замыкается на источнике напряжения $E(t)$ (см. рис.8.2).Спустя время, равное τ_0, конденсатор зарядится до максимального значения, равного Е и ток в цепи прекратится. Время заряда конденсатора пропорционально постоянной времени цепи, равной R_1C.

В момент времени $t = \tau_u$ перебросим ключ с клеммы 1 на клемму 2. Тогда конденсатор будет разряжаться. Ток разряда протекает последовательно через резисторы R_1 и R_2 и замыкается на конденсаторе С (см. рис.8.3). Время разряда конденсатора пропорционально постоянной времени цепи, равной $(R_1 + R_2)C$. Таким образом, заряд и разряд иллюстрируют переходные процессы (см. рис.8.4, промежутки I, $t \in [0;\tau_0]$ и III, $t \in [\tau_u;\infty)$), а промежуток II, $t \in [\tau_0;\tau_u]$– установившийся режим.

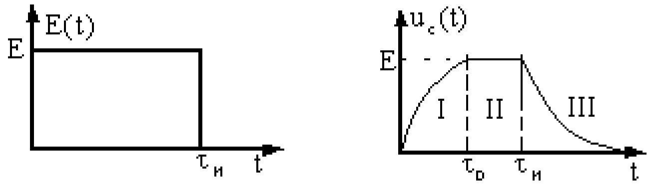


Рис.8.4

♦ Переходным процессом называется реакция цепи на входящее воздействие с момента коммутации цепи до момента наступления установившегося режима.

✓ Обычно момент коммутации цепи совмещают с началом отсчета ($t = 0$) и рассматривают переходной процесс до момента времени $t \to \infty$.

Законы коммутации.

При коммутации цепи скачком не могут изменяться напряжение на емкости и ток через индуктивность в силу инерционности емкости и индуктивности. Эти особенности цепи называют законами коммутации

♦ Аналитически законы коммутации можно записать в виде равенств:

1) $U_C(0-) = U_C(0+)$

0- - момент, предшествующий коммутации,

0+ - момент, наступивший сразу после коммутации.

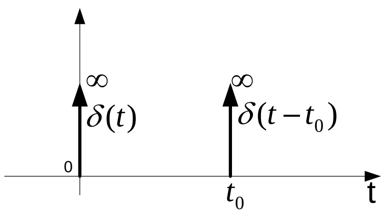
2) $i_L(0-) = i_L(0+)$

Основные функции, используемые при анализе переходных процессов.

1) Дельта функция – функция Дирака.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t)dt = f(t_0)$$

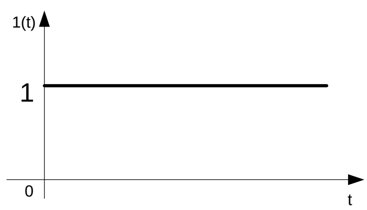


2) единичный сигнал или функция Хевисайда.

$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(v)dv = 1(t)$$



Основные методы анализа переходных процессов.

- Метод динамических уравнений. Метод основан на решении и составлении дифференциального уравнения цепи.
- Операторный метод на основе преобразования Лапласа.
- Метод на основе интеграла свертки.

Операторный метод анализа переходных процессов.

1. Суть операторного метода.
   Этот метод основан на составлении операторного уравнения цепи. Операторное уравнение цепи составляется либо на основе схемы замещения цепи, либо на основе дифференциального уравнения цепи. В качестве неизвестного в уравнение входит изображение Лапласа, интересующего нас процесса.

2. Схема анализа переходных процессов операторным методом:

   1-й вариант:
   Принципиальная схема → Дифференциальное уравнение → Операторное уравнение → $\hat{S}(p) \rightarrow S(t)$, где $S(t)$ - функция времени, описывающая переходной процесс, вычисляемая с помощью обратного преобразования Лапласа

   2-й вариант:
   Принципиальная схема → Схема замещения → Операторное уравнение → $\hat{S}(p) \rightarrow S(t)$

3. Преобразование Лапласа.
   $\hat{S}(p) = \int_0^\infty S(t) e^{-pt} dt$ - прямое преобразование Лапласа.

   $S(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{i-j\infty}^{i+j\infty} \hat{S}(p) e^{pt} dp$ - обратное преобразование Лапласа.

   $p = \delta + j\omega \quad \left[\frac{1}{c}\right]$

   где $S(t)$ - функция времени, описывающая переходной процесс (сигнал), $\hat{S}(p)$ - изображение по Лапласу сигнала (функция, полученная в результате прямого преобразования Лапласа сигнала $S(t)$). Чтобы удобнее было различать функцию времени (сигнал) и изображение по Лапласу сигнала, принято над буквой, обозначающей изображение по Лапласу, ставить знак $\wedge$.

Примеры вычисления прямого преобразования Лапласа.

Пример 1

Пусть $y(t) = 1(t)$. Найдем прямое преобразование Лапласа от этой функции.

$$\hat{Y}(p) = \int_0^\infty 1(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p} .$$

$$1(t) \fallingdotseq \frac{1}{p}$$

Знак $\fallingdotseq$, поставленный между двумя функциями, означает, что эти функции связаны межу собой прямым и обратным преобразованием Лапласа.

Пример 2

Пусть $y(t)=\delta(t)$. Найдем прямое преобразование Лапласа от этой функции.

$\hat{Y}(p)=\int\limits_0^{\infty}\delta(t)e^{-pt}dt=e^{-p0}=1$ (На основе фильтрующего свойства δ - функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$). Тогда $\delta(t)\doteqdot 1$

Таблица преобразования Лапласа для основных функция приведена в [2] на стр.33.

4. Основные свойства преобразования Лапласа.

4.1. Свойство линейности.

$$y(t)=a_1y_1(t)\pm y_2(t)a_2\doteqdot\hat{Y}(p)=a_1\hat{Y}_1(p)\pm a_2\hat{Y}_2(p),$$

где $y_1(t)\doteqdot\hat{Y}_1(p)$; $y_2(t)\doteqdot\hat{Y}_2(p)$

Пример 3

Пусть $y(t)=2\delta(t)-3\cdot 1(t)$. Тогда, используя свойство линейности и найденные выше изображения по Лапласу, имеем $\hat{Y}(p)=2-\frac{3}{p}$.

4.2. Дифференцирование оригинала.

$$y(t)=\frac{dS(t)}{dt}\doteqdot\hat{Y}(p)=p\hat{S}(p)-S(t)\Big|_{t=0}$$

$$y(t)=\frac{d^2S(t)}{dt^2}\doteqdot\hat{Y}(p)=p^2\hat{S}(p)-pS(t)\Big|_{t=0}-\frac{dS(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$y(t)=\frac{d^nS(t)}{dt^n}\doteqdot\hat{Y}(p)=p^n\hat{S}(p)-p^{n-1}S(t)\Big|_{t=0}-\cdots-\frac{d^{n-1}S(t)}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}$$

где $S(t)\doteqdot\hat{S}(p)$

4.3. Интегрирование оригинала.

$$y(t)=\int\limits_0^t S(v)dv\doteqdot\hat{Y}(p)=\frac{\hat{S}(p)}{p}+\frac{S(t)}{p}\Big|_{t=0}$$

Пример 4

Пусть $y(t)=t1(t)$.

Продифференцируем заданный сигнал: $\frac{dy}{dt}=1\cdot 1(t)+t\cdot\delta(t)=1(t)$. Тогда, используя найденные выше изображения по Лапласу, имеем $\hat{S}(p)=\frac{1}{p}$.

Поскольку $y(t)=\int\limits_0^t S(v)dv$, то, используя свойство интегрирования оригинала, имеем

$$\hat{Y}(p)=\frac{\hat{S}(p)}{p}+\frac{S(t)}{p}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{p^2}+\frac{0}{p}=\frac{1}{p^2}$$

4.4. Смещение оригинала во времени.

$$y(t)=S(t-\tau_0)\doteq\hat{Y}(p)=\hat{S}(p)e^{-p\tau_0}$$

Пример 5

Пусть $y(t)=E\cdot 1(t)-E\cdot 1(t-\tau_u)$. Тогда, используя свойства линейности, смещения оригинала во времени и найденные выше изображения по Лапласу, имеем $\hat{Y}(p)=\frac{E}{p}-\frac{E}{p}\cdot e^{-p\tau_u}=\frac{E}{p}\left(1-e^{-p\tau_u}\right)$

Таблица основных свойств преобразования Лапласа приведена в [2] на стр.32.

5. Составление операторного уравнения на основе дифференциального уравнения цепи.

Дифференциальное уравнение цепи:

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0 y(t)=b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+\ldots+b_0 e(t),\ n\geq m$$

$y(t)$ – интересующий нас переходной процесс (отклик).

$e(t)$ – входное воздействие, ток или напряжение.

$a_0,\ldots,a_{n-1},a_n,b_0,\ldots,b_m$ - коэффициенты, определяемые, принципиальной схемой цепи.

Воспользуемся свойством 4.2. Тогда вместо дифференциального получим операторное уравнение

$$a_n p^n\hat{Y}(p)+\ldots+a_0\hat{Y}(p)=b_m\hat{E}(p)p^m+\ldots+b_0\hat{E}(p)+c(p),(n\geq m),$$

где $c(p)$ – включает все начальные условия, т.е. все значения $y(t)$ и ее производных $\frac{d^\kappa y(t)}{dt^\kappa},k=1,\ldots n-1$ при $t=0$. Тогда

$$\hat{Y}(p)A_n(p)=\hat{E}(p)B_m(p)+c(p)(n\geq m)$$

$$\hat{Y}(p)=\hat{E}(p)\frac{B_m(p)}{A_n(p)}+\frac{c(p)}{A_n(p)},$$

где $B_m(p)=b_m p^m+\ldots+b_0,\quad A_n(p)=a_n p^n+\ldots+a_0$

Если начальные условия равны нулю, то c(p)=0. Тогда при нулевых начальных условиях

$$\hat{Y}(p)=\hat{E}(p)\frac{B_m(p)}{A_n(p)}$$

Отношение $\frac{B_m(p)}{A_n(p)}=K(p)$ называется передаточной функцией цепи.

Передаточная функция цепи, зависит от принципиальной схемы и не зависит от входного сигнала.

Тогда $\hat{Y}(p) = K(p)\hat{E}(p)$.

Из последнего равенства $K(p) = \dfrac{\hat{Y}(p)}{\hat{E}(p)}$

Тогда передаточной функцией K(p) линейной цепи называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала (реакции) к изображению по Лапласу входного сигнала воздействия), заданного в общем виде. Под выходным сигналом понимается сигнал на выходных клеммах четырёхполюсника. Под входным сигналом понимается функция, описывающая ЭДС источника напряжения $e(t)$, или источника тока $i(t)$, подключённого к входным клеммам. Еще раз отметим, что передаточная функция определяется по схеме замещения цепи при нулевых начальных условиях. Она (то есть отношение двух изображений по Лапласу) зависит только от принципиальной схемы цепи.

Пример 6

Найдём передаточную функцию для RC цепи, если реакция – напряжение на ёмкости $u_c(t)$ (рис.8.5) .

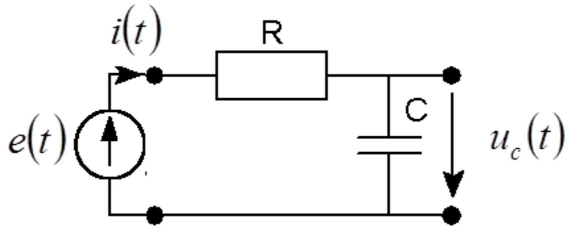


Рис.8.5

Для этого составим дифференциальное уравнение относительно $u_c(t)$.

Используя связь между током и напряжением на конденсаторе, имеем $i(t) = C\dfrac{du_c}{dt}$.

Используя закон Кирхгофа для контура, имеем $e(t) = u_R(t) + u_c(t)$.

Используя закон Ома для резистора, имеем $u_R(t) = R \cdot i(t) = RC\dfrac{du_c}{dt}$. Тогда $e(t) = RC\dfrac{du_c}{dt} + u_c(t)$. Мы составили дифференциальное уравнение относительно реакции $u_c(t)$.

Используя свойства преобразования Лапласа, перейдём от дифференциального уравнения к операторному уравнению.

$\hat{E}(p) = pRC\hat{U}_C(p) - u_c(t)\big|_{t=0} + \hat{U}_C(p)$, но $u_c(0) = 0$ (начальные условия нулевые).

Тогда $\hat{E}(p) = \hat{U}_C(p)(p\tau_0 + 1)$, где $\tau_0 = RC$ и, окончательно

$$K(p) = \frac{\hat{U}_C(p)}{\hat{E}(p)} = \frac{1}{p\tau_0 + 1}.$$

Вывод

Если начальные условия нулевые и передаточная функция четырёхполюсника известна, то сигнал на выходе линейной цепи можно найти за 3 шага по алгоритму

$$s_{вх}(t) \xrightarrow{1} \hat{S}_{вх}(p) \xrightarrow{2} \hat{S}_{вых}(p) = \hat{S}_{вх}(p)K(p) \xrightarrow{3} s_{вых}(t)$$

1-й шаг: вычислить прямое преобразование Лапласа $\hat{S}_{вх}(p)$ от входного воздействия $s_{вх}(t)$.

2-й шаг: умножить изображение по Лапласу входного процесса $\hat{S}_{вх}(p)$ на известную передаточную функцию $K(p)$ и найти изображение по Лапласу выходного процесса $\hat{S}_{вых}(p)$.

3-й шаг: определить выходной сигнала $s_{вых}(t)$ (реакцию цепи на входное воздействие) с помощью обратного преобразования Лапласа от его изображения $\hat{S}_{вых}(p)$.

Контрольные вопросы к лекции №8

1. Дайте определение переходного процесса в линейной цепи.
2. Сформулируйте законы коммутации цепи.
3. Какие методы анализа переходных процессов вы знаете?
4. В чем суть операторного метода анализа переходного процесса?
5. Приведите схему анализа переходных процессов операторным методом
6. Запишите основные свойства преобразования Лапласа.
7. Как составить операторное уравнение цепи?
8. Дайте определение передаточной функции цепи.
9. Изобразите схему анализа переходных процессов с помощью преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Типовые задачи к лекции №8

Изобразите на графике заданные функции времени и, используя свойства преобразования Лапласа, определите изображение по Лапласу этих функций:

1. $y(t) = 1(t - \tau)$;
2. $y(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$;
3. $y(t) = e^{j\omega t} 1(t)$;
4. $y(t) = sin(\omega t) 1(t)$
5. $y(t) = E \cdot 1(t) - e^{-(t-t_0)} 1(t - t_0)$;
6. $y(t) = t \cdot 1(t)$;
7. $y(t) = t^2 \cdot 1(t)$.