

ЛЕКЦИЯ №7

Резонансные цепи. ([2], стр. 19-29)

1. Последовательный колебательный контур.

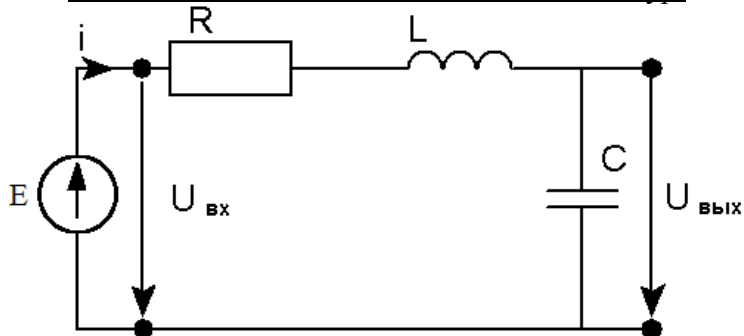


Рис. 7.1

На рисунке 7.1 приведена схема последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой.

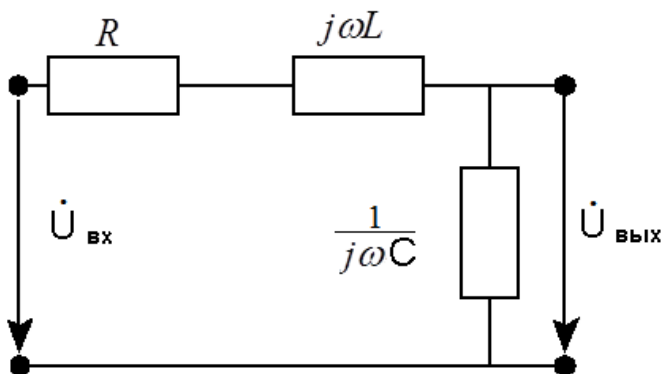
Найдём КЧХ, АЧХ, ФЧХ этого четырёхполюсника при различных нагрузках.

По определению КЧХ – отношение комплексных амплитуд выходного и входного гармонического сигнала в зависимости от его частоты

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{\dot{I}Z_{\text{вых}}}{\dot{I}Z_{\text{вх}}} = \frac{\dot{Z}_{\text{вых}}}{\dot{Z}_{\text{вх}}} = \frac{|\dot{Z}_{\text{вых}}| e^{j\varphi_{\text{вых}}}}{|\dot{Z}_{\text{вх}}| e^{j\varphi_{\text{вх}}}} = \frac{|\dot{Z}_{\text{вых}}|}{|\dot{Z}_{\text{вх}}|} e^{j(\varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}})}$$

$$AЧХ = |K(j\omega)| = \frac{|\dot{Z}_{\text{вых}}|}{|\dot{Z}_{\text{вх}}|} \quad \PhiЧХ = \arg K(j\omega) = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$$

В формулах КЧХ, АЧХ и ФЧХ фигурирует входное сопротивление контура. Найдём его. Для этого воспользуемся схемой замещения контура.



$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

$$|\dot{Z}_{\text{вх}}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{\omega C} \sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}$$

$$\varphi_{\text{вх}} = \arctg \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$

$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - резонансная частота – частота, на которой входное сопротивление $\dot{Z}_{\text{вх}} = R$,

т.е. на этой частоте индуктивное и емкостное сопротивления равны по модулю и противоположны по знаку, и, следовательно, компенсируют друг друга. Кроме того,

напряжения, выделяемые на индуктивности и емкости, так же равны друг другу по модулю и противоположны по знаку. Говорят, что в этом случае в контуре происходит резонанс напряжений, то есть суммарное падение напряжения на индуктивности и емкости равно нулю.

2. Частотные характеристики последовательного колебательного контура

Рассмотрим различные варианты последовательного колебательного контура.

2.1. Контур с емкостной нагрузкой (рис.7.2)

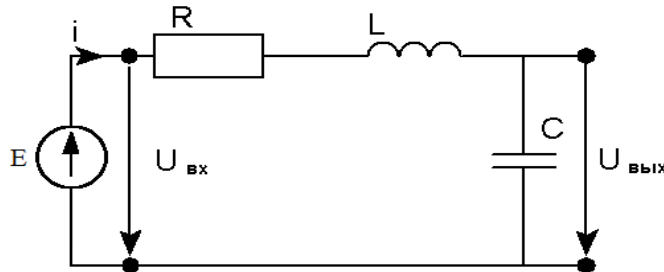
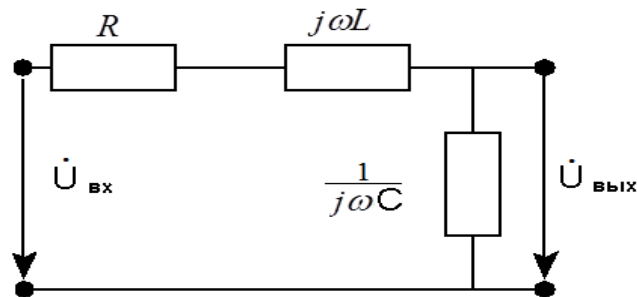


Рис.7.2

Найдем КЧХ АЧХ и ФЧХ контура с емкостной нагрузкой (см. рис.7.2). Для этого воспользуемся схемой замещения, по которой определим модуль и аргумент



выходного емкостного сопротивления.

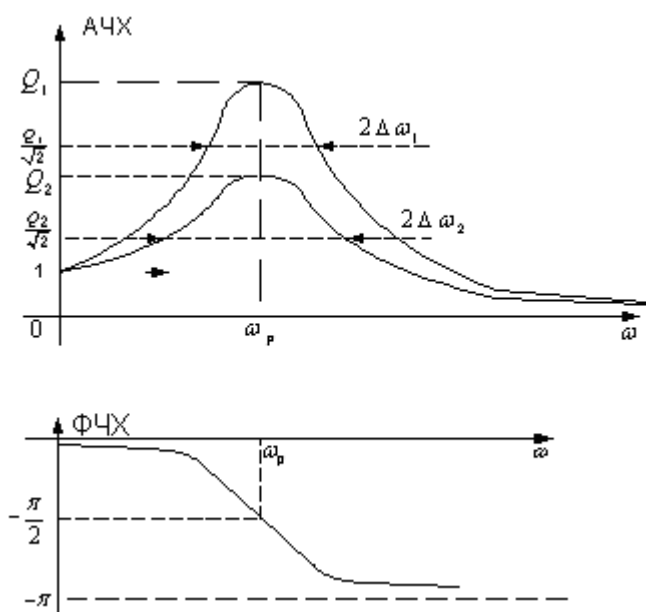
$$\dot{Z}_{\text{вых}} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}.$$

$$\text{Тогда КЧХ } K(j\omega) = \frac{\dot{Z}_{\text{вых}}}{\dot{Z}_{\text{вх}}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}.$$

$$|\dot{Z}_{\text{вых}}| = \frac{1}{\omega C}; \quad \varphi_{\text{вых}} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Тогда АЧХ} = \frac{|\dot{Z}_{\text{вых}}|}{|\dot{Z}_{\text{вх}}|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}; \quad \text{ФЧХ} = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}} = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рисунке 7.3.



$$AЧХ(\omega_p) = \frac{I}{\omega_p RC} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

Q – Добротность контура
 ρ – Характеристическое сопротивление контура

$$R_2 > R_1 \Rightarrow \begin{cases} Q_2 < Q_1 \\ 2\Delta\omega_2 > 2\Delta\omega_1 \end{cases}$$

$$\Phi ЧХ(\omega_p) = -\frac{\pi}{2}$$

Рис.7.3.

АЧХ имеет max на резонансной частоте, т.к. входное сопротивление минимально и равно R. При этом ток протекающий в контуре, максимален и выходное напряжение также максимально.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к бесконечности. С увеличением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, это объясняется тем, что емкость (конденсатор) закорачивает выходные клеммы с ростом частоты, поскольку емкостное сопротивление с ростом частоты уменьшается.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к нулю. При стремлении частоты к нулю значение АЧХ стремится к единице. Это можно объяснить так:

- сопротивление конденсатора при стремлении частоты к нулю стремится к бесконечности,
- тогда ток по цепи не течет,
- падение напряжения на элементах R и L равно нулю,
- следовательно, напряжения на входе и выходе одинаковы и их отношение равно единице.

Полосой пропускания линейной цепи называется диапазон частот, в котором АЧХ уменьшается не более, чем в $\sqrt{2}$ раза от своего максимального значения. При увеличении R расширяется полоса пропускания последовательного колебательного контура. При высокой добротности полоса пропускания колебательного контура узкая, она пропускает частоты вблизи ω_p и контур называется полосно-пропускающим фильтром. С уменьшением добротности полоса пропускания контура расширяется при добротности близкой к 1, контур станет фильтром низких частот. Изменяя индуктивность или емкость можем изменить резонансную частоту и сместить max АЧХ вправо (L или C \uparrow) или влево (L или C \downarrow) и изменим диапазон частот, которые пропускает фильтр.

2.2. Контур с резистивной нагрузкой (рис.7.4)

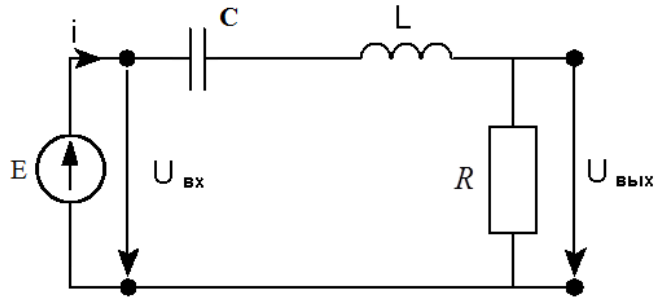
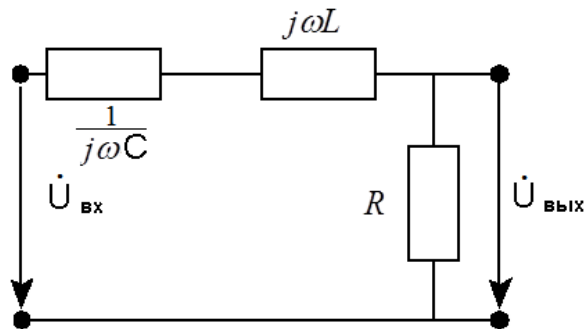


Рис.7.4.

Найдем АЧХ и ФЧХ контура с резистивной нагрузкой (см. рис.7.4). Для этого



воспользуемся схемой замещения, по которой определим модуль и аргумент резистивного сопротивления.

$$\dot{Z}_{\text{вых}} = R, \quad |\dot{Z}_{\text{вых}}| = R, \quad \varphi_{\text{вых}} = 0. \text{ Тогда}$$

$$AЧХ = \frac{|\dot{Z}_{\text{вых}}|}{|\dot{Z}_{\text{вх}}|} = \frac{|R|}{\frac{1}{|\omega C|} \sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} = \frac{|R| |\omega C|}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

$$AЧХ(\omega_p) = \frac{|R| |\omega_p C|}{\sqrt{R^2 \omega_p^2 C^2 + (\omega_p^2 LC - 1)^2}} = \frac{|R| |\omega_p C|}{\sqrt{(R \omega_p C)^2}} = \frac{|R| |\omega_p C|}{|R \omega_p C|} = 1$$

$$\PhiЧХ = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}} = 0 - \arctg \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR} = -\arctg \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$

$$\PhiЧХ(\omega_p) = 0$$

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рисунке 7.5.

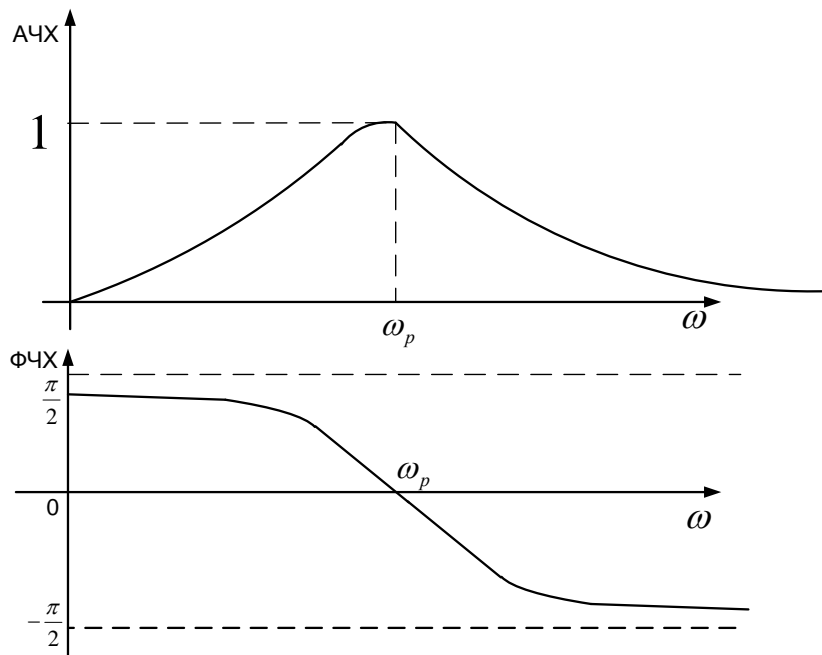


Рис.7.5

АЧХ имеет максимум на резонансной частоте, т.к. входное сопротивление минимально и равно R . При этом ток, протекающий по цепи, максимален и выходное напряжение также максимально.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к бесконечности. С увеличением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, т.к. индуктивное сопротивление с ростом частоты стремится к бесконечности, ток через цепь стремится к нулю и напряжение на резистивной нагрузке (на выходе) также стремится к нулю.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к нулю. С уменьшением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, т.к. емкостное сопротивление с ростом частоты стремится к бесконечности, ток через цепь опять стремится к нулю и напряжение на резистивной нагрузке (на выходе) также стремится к нулю.

2.3. Контур с индуктивной нагрузкой (рис. 7.6)

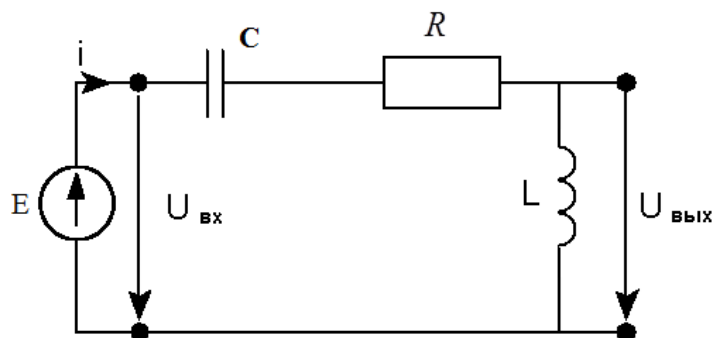
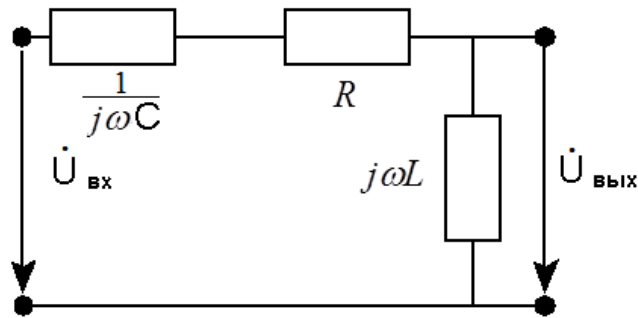


Рис.7.6.

Найдем АЧХ и ФЧХ контура с индуктивной нагрузкой (см. рис.7.6). Для этого воспользуемся схемой замещения, по которой определим модуль и аргумент индуктивного сопротивления.



$$\dot{Z}_{\text{вых}} = j\omega L, \quad |\dot{Z}_{\text{вых}}| = |\omega L|, \quad \varphi_{\text{вых}} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда

$$A_{\text{ЧХ}} = \frac{|\dot{Z}_{\text{вых}}|}{|\dot{Z}_{\text{вх}}|} = \frac{|\omega L| |\omega C|}{\sqrt{(R\omega C)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

$$\Phi_{\text{ЧХ}} = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$

$$A_{\text{ЧХ}}(\omega_p) = \frac{|\omega_p^2 LC|}{\sqrt{(R\omega_p C)^2}} = \frac{1}{|R\omega_p C|} = \frac{\rho}{R} = Q$$

$$\Phi_{\text{ЧХ}}(\omega_p) = \frac{\pi}{2}$$

Графики АЧХ и ФЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой приведены на рисунке 7.7.

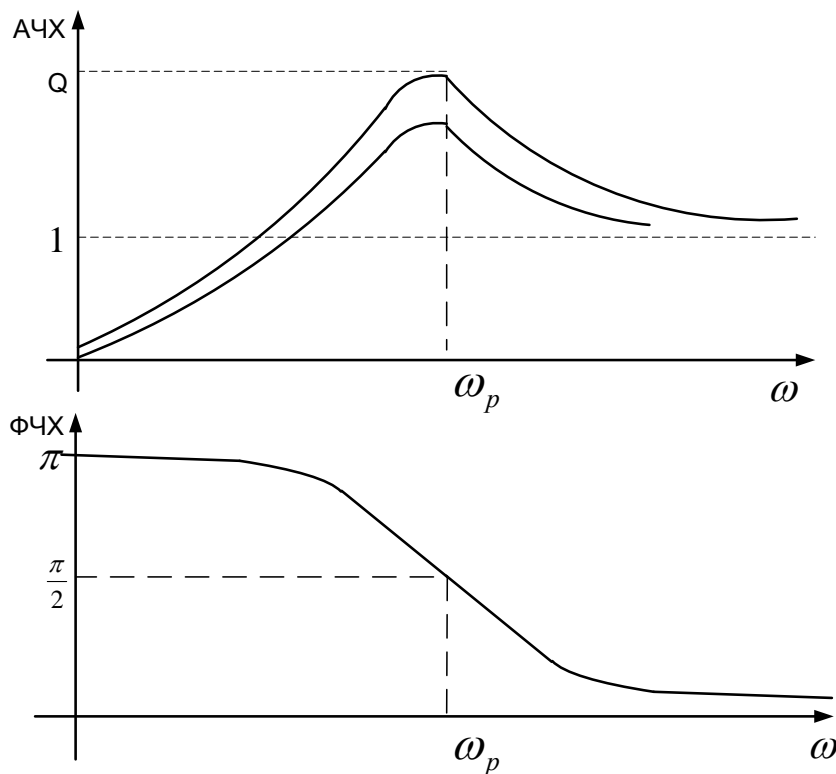


Рис.7.7.

АЧХ имеет максимум на резонансной частоте, т.к. входное сопротивление минимально и равно R . При этом ток, протекающий по цепи, максимален и выходное напряжение также максимально.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к нулю. С уменьшением частоты относительно резонансной АЧХ стремится к нулю, это объясняется тем, что катушка индуктивности закорачивает выходные клеммы с уменьшением частоты, поскольку индуктивное сопротивление с уменьшением частоты уменьшается.

Обсудим изменение АЧХ при стремлении частоты к бесконечности. При стремлении частоты к бесконечности значение АЧХ стремится к единице. Это можно объяснить так:

- сопротивление индуктивности при стремлении частоты к бесконечности стремится к бесконечности,
- тогда ток по цепи не течет,
- падение напряжения на элементах R и C равно нулю,
- следовательно, напряжения на входе и выходе одинаковы и их отношение равно единице.

3. Параллельный колебательный контур (рис.7.8).

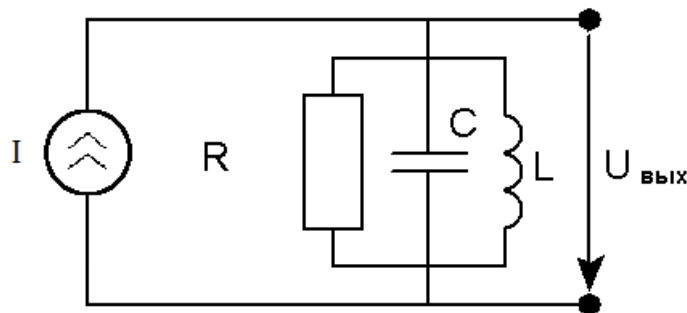
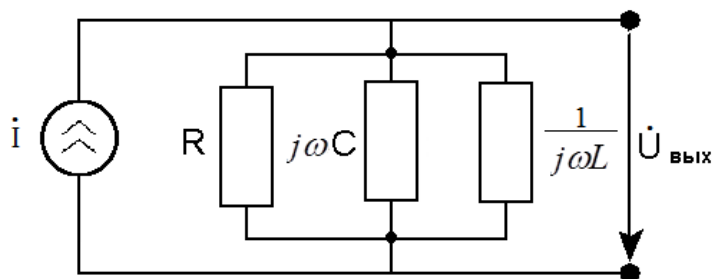


Рис. 7.8

На рисунке 7.8 изображена схема параллельного колебательного контура. Найдем КЧХ, АЧХ и ФЧХ этой цепи. Для этого воспользуемся схемой замещения, в которой заменим элементы схемы на комплексные проводимости



В параллельном колебательном контуре КЧХ определяется как отношение комплексной амплитуды гармонического напряжения на контуре к комплексной амплитуде гармонического тока, протекающего через контур в зависимости от частоты гармоника. Тогда

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{BbLX}}{\dot{I}} = \dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}}$$

$$\dot{U}_{BbLX} = K(j\omega)\dot{I} = \dot{I}\dot{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{Y}}$$

$$\text{Где } \dot{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Преобразуем проводимость контура.

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + j\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}\left(\omega C\sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\omega L}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\frac{(\omega - \omega_p)(\omega + \omega_p)}{\omega_p\omega}\right)\right)$$

$$\left[Q = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}; \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho; \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right]$$

ω_p - резонансная частота;

ρ - характеристическое сопротивление контура;

Q - добротность;

$\Delta\omega = \omega - \omega_p$ - абсолютная расстройка;

При $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ $\dot{Y} = \frac{1}{R}$ индуктивная и емкостная проводимость компенсируют друг друга

и в контуре наступает резонанс токов. При этом токи, протекающие через L и C, компенсируют друг друга, так как равны по модулю и противоположны по знаку. Сам контур при этом обладает минимальной проводимостью и максимальным сопротивлением.

При малых расстройках $\Delta\omega$ $\omega \approx \omega_p$. Тогда:

$$\dot{Y} \approx \frac{1}{R}\left(1 + jQ\left(\frac{\Delta\omega \cdot 2\omega_p}{\omega_p^2}\right)\right) = \frac{1}{R}\left(1 + jQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}\right)$$

$$K(j\omega) = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{R}{1 + jQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}}$$

$$\text{АЧХ} = |K(j\omega)| = \left| \frac{R}{\sqrt{1 + \left(Q\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}\right)^2}} \right|$$

$$\Phi_{\text{ЧХ}} = \arg K(j\omega) = 0 - \operatorname{arctg} \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p} \right)$$

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис.7.9 и 7.10

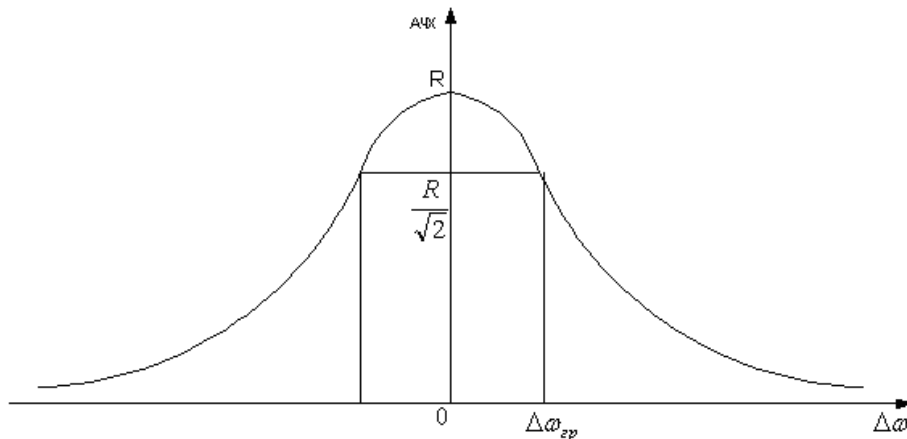


Рис. 7.9

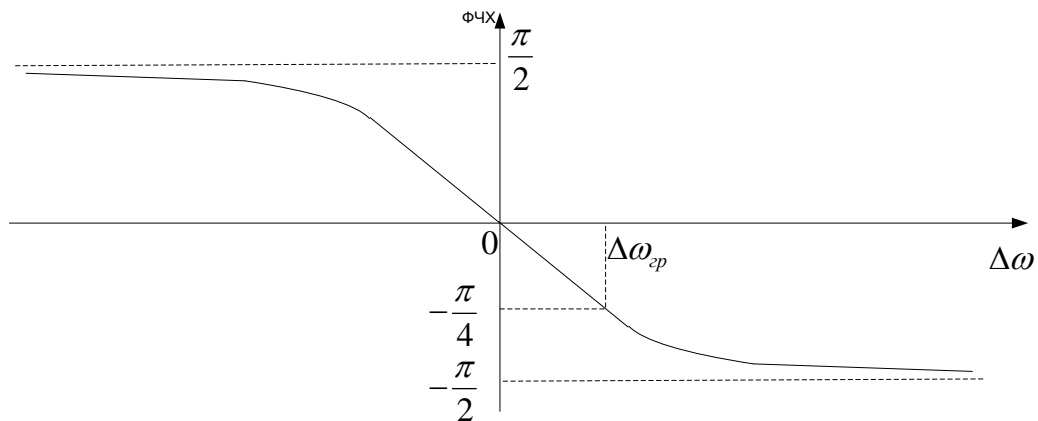


Рис. 7.10

$$Q \frac{2\Delta\omega_{\text{ГР}}}{\omega_p} = 1$$

$$\Delta\omega_{\text{ГР}} = \frac{\omega_p}{2Q}; \Delta\omega_{\text{ГР}} = \frac{1}{2RC}$$

- ◆ На резонансной частоте АЧХ имеет max R, т.к. на этой частоте происходит резонанс токов, когда индуктивная и емкостная проводимости компенсируют друг друга, поскольку равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, сопротивление нагрузки на резонансной частоте становится максимальным и равным R.
- ◆ С увеличением расстройки $\Delta\omega$, то есть при $\omega > \omega_p$ АЧХ падает, потому что с ростом частоты уменьшается емкостное сопротивление, которое закорачивает выходные клеммы. С уменьшением частоты ω относительно ω_p , то есть при отрицательных расстройках, АЧХ также уменьшается, потому что с уменьшением частоты уменьшается индуктивное сопротивление, которое закорачивает выходные клеммы.

Рабочий диапазон частоты: $[-\Delta\omega_{\text{ГР}}; \Delta\omega_{\text{ГР}}]$ называется полосой пропускания.

- ✓ Для изменения ω_p можно изменять индуктивность и емкость, но емкость удобнее (пластинки вращать удобнее, чем изменять число витков). Для увеличения полосы пропускания надо уменьшить R .

Контрольные вопросы к лекции №7

1. Что называется резонансом напряжений и когда он возникает?
2. Почему АЧХ последовательного колебательного контура имеет максимум на резонансной частоте?
3. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой стремится к нулю при стремлении частоты к бесконечности?
4. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с емкостной нагрузкой стремится к единице при стремлении частоты к нулю?
5. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой стремится к единице при стремлении частоты к бесконечности?
6. Почему АЧХ последовательного колебательного контура с индуктивной нагрузкой стремится к нулю при стремлении частоты к нулю?
7. Что нужно изменить в последовательном колебательном контуре для увеличения его добротности?
8. Что называется резонансом токов и когда он возникает?
9. Почему АЧХ параллельного колебательного контура имеет максимум на резонансной частоте?
10. Как увеличить полосу пропускания параллельного колебательного контура?

Типовые задачи к лекции №7

1. Определите комплексно-частотную, амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики последовательного колебательного контура, когда выходное напряжение снимается с емкости и изобразите друг под другом АЧХ и ФЧХ контура, если $R = 500$

$$[\text{Ом}] \quad C = \frac{10^{-8}}{2\pi} \text{ [ф]}, \quad L = \frac{10^{-2}}{2\pi} \text{ [Гн]}$$

2. Определите комплексно-частотную, амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики последовательного колебательного контура, когда выходное напряжение снимается с индуктивности и изобразите друг под другом АЧХ и ФЧХ контура, если

$$R = 250 \text{ [Ом]} \quad C = \frac{10^{-8}}{2\pi} \text{ [ф]}, \quad L = \frac{10^{-2}}{2\pi} \text{ [Гн]}$$

3. Определите комплексно-частотную, амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики параллельного колебательного контура и изобразите друг под другом АЧХ и ФЧХ контура, если

$$R = 250 \text{ [Ом]} \quad C = \frac{10^{-8}}{2\pi} \text{ [ф]}, \quad L = \frac{10^{-2}}{2\pi} \text{ [Гн]}.$$