Лекция №6.

Методы анализа сложных линейных цепей.

Существуют универсальные методы, позволяющие автоматически описывать связь между током и напряжением на различных участках цепи.

Эти методы позволяют сократить число уравнений, связывающих между собой токи и напряжения, и используются для определения I и U на резистивных и комплексных сопротивлениях.

Существует 3 основных метода:

1. Метод узловых потенциалов
2. Метод контурных токов
3. Метод переменных состояний

Эти методы различаются выбором неизвестных при составлении уравнений

1.Метод узловых потенциалов (напряжений). .[1] с.37-41

Задачу анализа разветвленных цепей можно значительно упростить, если воспользоваться специальными методами, предназначенными для расчета сложных цепей. Одним из таких методов является *метод узловых напряжений*. В методе узловых напряжений независимыми переменными являются напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного (опорного) узла. Эти величины называют *узловыми напряжениями*. Положительные направления узловых напряжений указывают стрелками от рассматриваемых узлов к базисному. В качестве последнего удобно выбирать заземленный узел или узел, в котором сходится наибольшее число ветвей. Уравнения составляют только на основе первого закона Кирхгофа (о токах в узле)
Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то узловые напряжения будут равны потенциалам соответствующих узлов. Поэтому метод называют также *методом узловых потенциалов*.

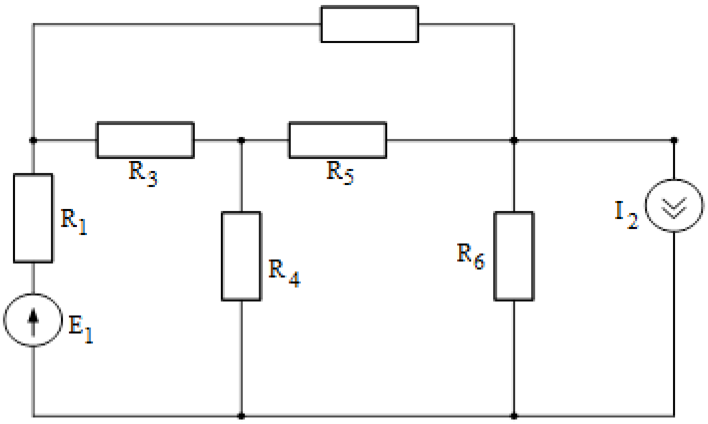
Алгоритм

1. Выбрать базисный узел. Напряжения (потенциалы) остальных узлов использовать в качестве неизвестных.
2. Записать уравнения для токов в ветвях схемы по обобщенному закону Ома.
3. Записать для всех узлов, кроме базисного, уравнения по 1 закону Кирхгофа и составить систему уравнений
4. Решить полученную систему уравнений относительно выбранных неизвестных.

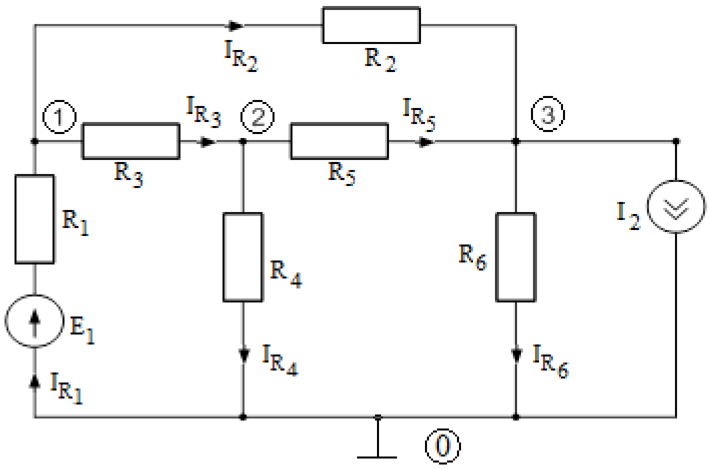
Примечание: напряжения и токи могут быть постоянными, комплексными амплитудами и функциями времени

Пример.

Для заданной схемы составить систему уравнений, используя метод узловых напряжений.



Решение



1) В качестве базового выберем узел, в котором сходятся $R_1; R_4; R_6$ $и$ I_2 и заземлим его. Обозначим напряжения узлов 1-3 как U_1, U_2, U_3 соответственно.
2) Используя закон Ома, запишем уравнения для токов в ветвях, соединяющих узлы:

Ветвь 0-1: $I_{R1} = \dfrac{E_1 - U_1}{R_1}$; ветвь 1-2: $I_{R3} = \dfrac{U_1 - U_2}{R_3}$; ветвь 1-3: $I_{R2} = \dfrac{U_1 - U_3}{R_2}$;

ветвь 2-3: $I_{R5} = \dfrac{U_2 - U_3}{R_5}$; ветвь 2-0: $I_{R4} = \dfrac{U_2 - 0}{R_4}$; ветвь 3-0: $I_{R6} = \dfrac{U_3 - 0}{R_6}$;

ветвь, содержащая источник тока: I_2.

3) Составим систему уравнений, используя первый закон Кирхгофа:

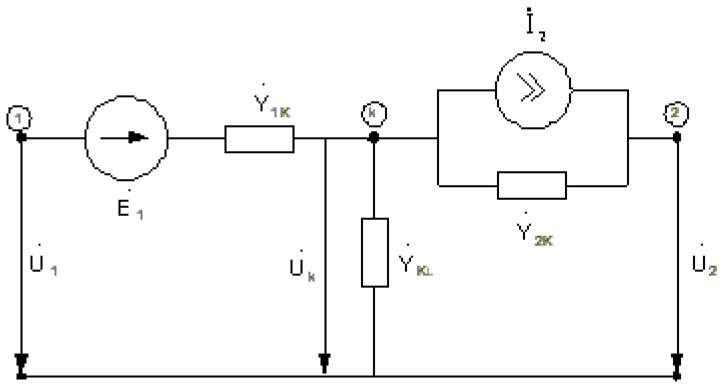
$$\begin{cases} I_{R1} = I_{R3} + I_{R2} & для \quad 1-го \quad узла \\ I_{R3} = I_{R4} + I_{R5} & для \quad 2-го \quad узла \\ I_{R2} + I_{R5} = I_{R6} + I_2 & для \quad 3-го \quad узла \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{E_1 - U_1}{R_1} = \dfrac{U_1 - U_2}{R_3} + \dfrac{U_1 - U_3}{R_2}, \\ \dfrac{U_1 - U_2}{R_3} = \dfrac{U_2}{R_4} + \dfrac{U_2 - U_3}{R_5}, \\ \dfrac{U_1 - U_3}{R_2} + \dfrac{U_2 - U_3}{R_5} = \dfrac{U_3}{R_6} + I_2. \end{cases}$$

4) Решив её относительно U_1, U_2, U_3, мы найдём их, а затем токи и напряжения на всех элементах схемы.

Например, напряжение на резисторе R_2 $U_{R_2} = U_1 - U_3$, а ток, протекающий через резистор, $I_{R_2} = \dfrac{U_{R_2}}{R_2}$.

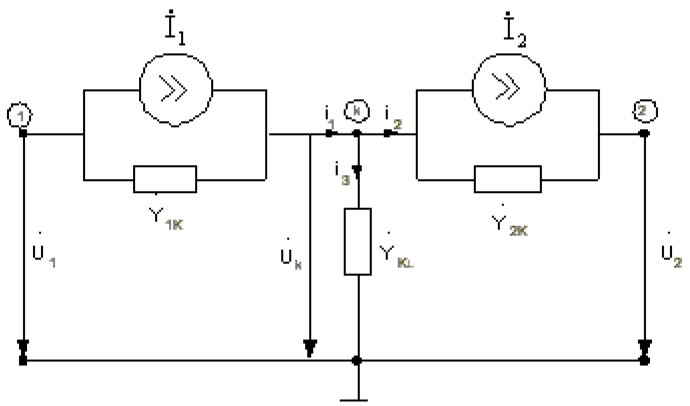
<u>2. Упрощение метода для постоянных и гармонических источников</u>

Рассмотрим фрагмент схемы, содержащей источники тока, ЭДС и комплексные проводимости $\dot{Y}$.



Заменим источник ЭДС на эквивалентный источник тока.

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 \cdot \dot{Y}_{1k}$$



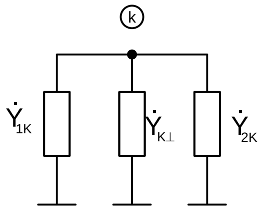
Используя закон Кирхгофа для узла, составим систему уравнений

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 = \dot{I}_1 + \left(\dot{U}_1 - \dot{U}_K\right)\dot{Y}_{1K} \\ i_2 = \dot{U}_K \cdot \dot{Y}_{K\perp} \\ i_3 = \dot{I}_2 + \left(\dot{U}_K - \dot{U}_2\right)\dot{Y}_{2K} \end{cases}$$

Подставив второе, третье и четвертое уравнения системы в первое уравнение, получим

$$
\begin{aligned}
&-\dot I_1-(\dot U_1-\dot U_K)\dot Y_{1K}+\dot U_K\dot Y_{K\perp}+\dot I_2+(\dot U_K-\dot U_2)\dot Y_{2K}=0\\
&-\dot U_1\dot Y_{1K}+\dot U_K\dot Y_{1K}+\dot U_K\dot Y_{K1}+\dot U_K\dot Y_{2K}-\dot U_2 Y_{2K}=\dot I_1-\dot I_2\\
&-\dot U_1\dot Y_{1K}+\dot U_K(\dot Y_{1K}+\dot Y_{K1}+\dot Y_{2K})-\dot U_2 Y_{2K}=\dot I_1-\dot I_2\\
&-\dot U_1\dot Y_{1K}+\dot U_K\dot Y_{KK}-\dot U_2\dot Y_{2K}=I^{(K)}
\end{aligned}
$$

Где $\dot Y_{KK}=\dot Y_{1K}+\dot Y_{K\perp}+\dot Y_{2K}$



$\dot Y_{KK}$ - узловая проводимость K–го узла, $\dot I_K=I_1-I_2$ - ток K-го узла. Узловые проводимости $\dot Y_{KK}$ определяются следующим образом: заземляются противоположные концы ветвей, подходящих к данному узлу (см. рис.) и определяется суммарная проводимость поученной цепи. При этом источники токов разрываются.

- ✓ Уравнение $-\dot U_1\dot Y_{1K}+\dot U_K\dot Y_{KK}-\dot U_2\dot Y_{2K}=I^{(K)}$представляет собой типичное уравнение для k – го узла в методе узловых напряжений. Под узлом здесь понимают узел, в котором сходится не менее трех ветвей.

Заметим, что в левую часть уравнения со знаком “+” входит слагаемое для потенциала

K-го узла, а со знаком “-“ все остальные слагаемые. Если в схеме всего n – узлов, то получим систему из n – уравнений, с n – неизвестными, которыми будут узловые напряжения $\dot U_K$. Приведем пример системы из 4 – х уравнений:

$$
\begin{cases}
\dot U_1\dot Y_{11}-\dot U_2\dot Y_{12}-\dot U_3\dot Y_{13}-\dot U_4\dot Y_{14}=\dot I^{(1)}\\
-\dot U_1\dot Y_{21}+\dot U_2\dot Y_{22}-\dot U_3\dot Y_{23}-\dot U_4 Y_{24}=\dot I^{(2)}\\
\vdots\\
-\dot U_1\dot Y_{41}-\dot U_2\dot Y_{42}-\dot U_3\dot Y_{43}-\dot U_4\dot Y_{44}=\dot I^{(4)}
\end{cases}
\quad(6.1)
$$

или в матричной форме:

$$
\begin{pmatrix}
Y_{11}\ \ldots -Y_{14}\\
-Y_{21}\ldots -Y_{24}\\
\vdots\\
-Y_{41}\ldots\ Y_{44}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\dot U_1\\ \dot U_2\\ \vdots\\ \dot U_4
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\dot I^{(1)}\\ \dot I^{(2)}\\ \vdots\\ \dot I^{(4)}
\end{pmatrix}
\quad(6.2)
$$

- ✓ Метод узловых потенциалов (напряжений) позволяет определить по заданной схеме напряжение (разность потенциалов) узлов схемы относительно базового узла, который обычно заземлен (т.е. его потенциал равен нулю).

Для определения узловых потенциалов следует:

1) Выбрать базовый узел и заземлить его.

   а) Если требуется найти токи и напряжения на всех элементах схемы, то за базовый узел удобно выбрать узел, в котором сходится наибольшее число ветвей.

   б) Если требуется найти напряжение на одном двухполюснике, то за базовый узел удобно выбрать один из полюсов этого двухполюсника.

2) Заменить источники напряжения в заданной схеме на эквивалентные источники тока и, записав токи, подтекающие к узлу со знаком “+” и оттекающие со знаком “ -”, найти узловые токи.

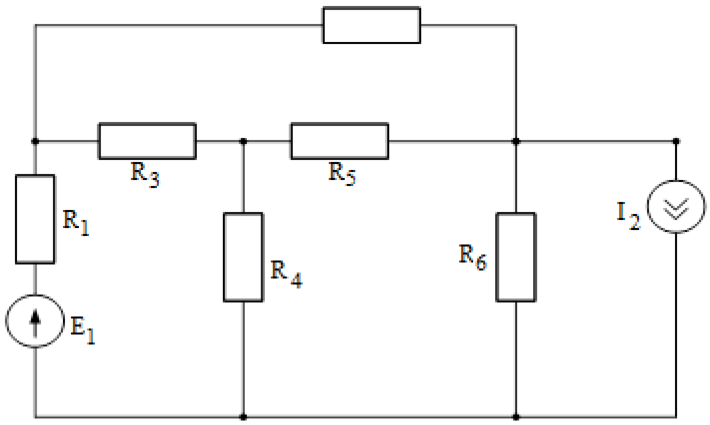
3) Найти межузловые проводимости ветвей, соединяющих незаземленные узлы. $\dot{Y}_{mp} = \dot{Y}_{pm}, p \neq m$, если узлы m и p не имеют ветвей между собой, то $\dot{Y}_{mp} = 0$

4) Найти узловые проводимости $\dot{Y}_{KK}$, заземлив противоположные концы ветвей, подходящих к данному узлу. При этом источники токов разрываются.

5) Записать систему уравнений в форме (6.1) или (6.2).

Пример.

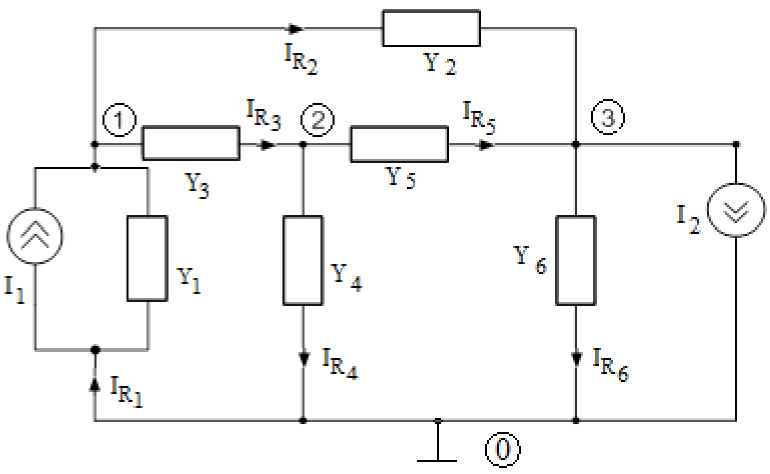
Для заданной схемы составить систему уравнений, используя упрощение метода узловых напряжений.



Решение

1) В качестве базового выберем узел, в котором сходятся $R_1; R_4; R_6$ *и* I_2 и заземлим его.

2) Заменим источник ЭДС на эквивалентный источник тока и сопротивления на проводимости.



$$I_1 = E_1 Y_1$$

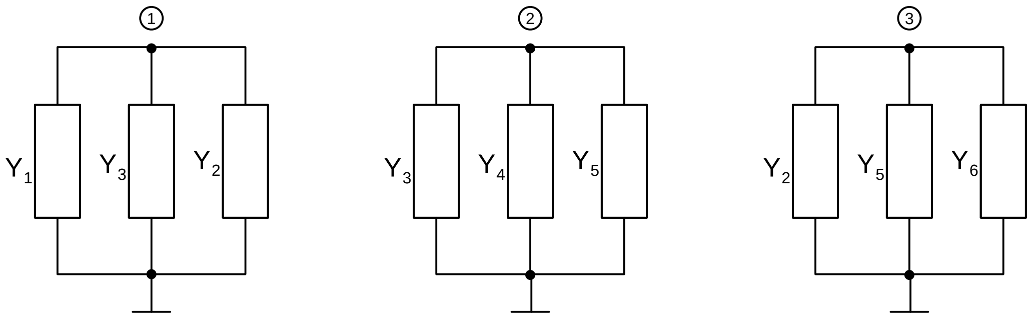
$$Y_K = \frac{1}{R_K}$$

3) Найдем межузловые проводимости Y_{mp}

$$Y_{12} = Y_3 = \frac{1}{R_3}; Y_{21} = Y_{12}; Y_{13} = Y_2 = \frac{1}{R_2}; Y_{31} = Y_{13}$$

$$Y_{23} = Y_5 = \frac{1}{R_5}; Y_{32} = Y_{23}$$

4) Найдем узловые проводимости Y_{KK}



$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$Y_{22} = Y_3 + Y_4 + Y_5 = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

$$Y_{33} = Y_2 + Y_5 + Y_6 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

5) Составим систему из трех уравнений:

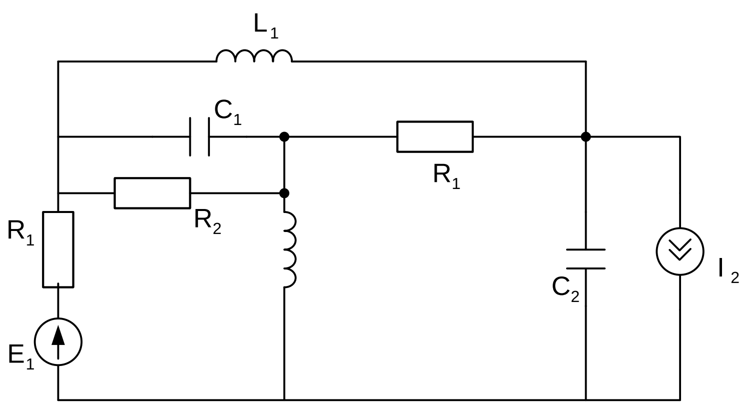
$$\begin{cases} U_1 Y_{11} - U_2 Y_{12} - U_3 Y_{13} = I_1 \\ -U_1 Y_{21} + U_2 Y_{22} - U_3 Y_{23} = 0 \\ -U_1 Y_{31} - U_2 Y_{32} + U_3 Y_{33} = -I_2 \end{cases}$$

Решая эту систему относительно U_1, U_2, U_3, мы найдём их, а затем токи и напряжения на всех элементах схемы.

Если бы $R_1 = 0$, то есть вместо него была перемычка, то узел (1) из системы уравнений выпал бы, т.к. $U_1 = E_1$. Тогда система состояла бы из двух уравнений.

Пример на самостоятельную проработку:

Используя метод узловых потенциалов, составьте систему уравнений для заданной схемы.

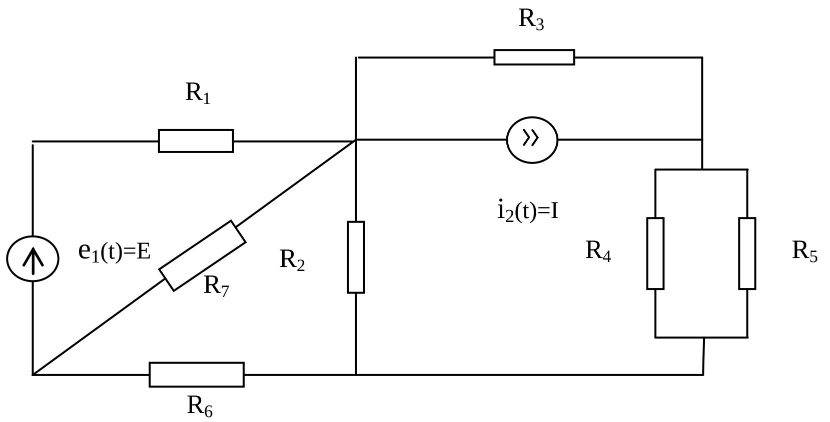


Контрольные вопросы к лекции №6

1. Перечислите основные методы анализа линейных цепей.
2. Сформулируйте суть метода узловых потенциалов.
3. Из каких соображений выбирается базовый узел в методе узловых потенциалов?
4. В каком случае межузловая проводимость равна нулю?
5. Как определяется узловая проводимость?
6. Как определяется узловой ток?
7. Запишите типичное уравнения для к-го узла в методе узловых потенциалов.
8. От чего зависит количество уравнений, входящих в систему, из которой определяются узловые потенциалы?
9. Какой узел вы выбрали бы в качестве базового, в схеме примера, заданного для самостоятельной проработки, если бы нужно было найти напряжение на катушке L_1?

Типовые задачи к лекции №6

1. Используя метод узловых напряжений, определите напряжение, на элементе R_2 в схеме, изображенной на рисунке, если $e_1(t)=E$, E=3B; $i_2(t)=I$, I=2mA;



$R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=R_7=1$кОм.

2. Используя метод узловых напряжений, определите напряжение, на элементе Z_2 в схеме, изображенной на рисунке, если $e_1(t)=E\cos(\omega_0 t)$,E=1B, $i_2(t)= I\cos\omega_0 t$, I=2mA; $\omega_0=2\pi\cdot10^4$ $Z_1=Z_3=R=1$кОм, $Z_2=1/(j\omega_0 C)$,$C=10^{-7}/(2\pi)$Ф, $Z_4=Z_5=2R=2$кОм.