

## ЛЕКЦИЯ №6.

### **Методы анализа сложных линейных цепей.**

Существуют универсальные методы, позволяющие автоматически описывать связь между током и напряжением на различных участках цепи.

Эти методы позволяют сократить число уравнений, связывающих между собой токи и напряжения, и используются для определения  $I$  и  $U$  на резистивных и комплексных сопротивлениях.

Существует 3 основных метода:

1. Метод узловых потенциалов
2. Метод контурных токов
3. Метод переменных состояний

Эти методы различаются выбором неизвестных при составлении уравнений

#### 1. Метод узловых потенциалов (напряжений). [1] с.37-41

Задачу анализа разветвленных цепей можно значительно упростить, если воспользоваться специальными методами, предназначенными для расчета сложных цепей. Одним из таких методов является *метод узловых напряжений*. В методе узловых напряжений независимыми переменными являются напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного (опорного) узла. Эти величины называют *узловыми напряжениями*. Положительные направления узловых напряжений указывают стрелками от рассматриваемых узлов к базисному. В качестве последнего удобно выбирать заземленный узел или узел, в котором сходится наибольшее число ветвей. Уравнения составляют только на основе первого закона Кирхгофа (о токах в узле). Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то узловые напряжения будут равны потенциалам соответствующих узлов. Поэтому метод называют также *методом узловых потенциалов*.

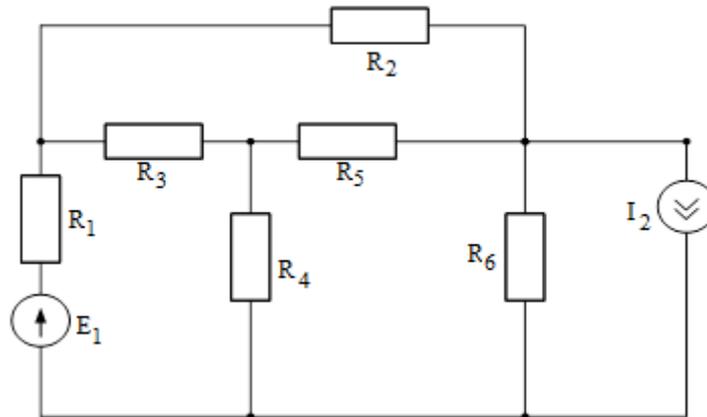
#### **Алгоритм**

1. Выбрать базисный узел. Напряжения (потенциалы) остальных узлов использовать в качестве неизвестных.
2. Записать уравнения для токов в ветвях схемы по обобщенному закону Ома.
3. Записать для всех узлов, кроме базисного, уравнения по 1 закону Кирхгофа и составить систему уравнений
4. Решить полученную систему уравнений относительно выбранных неизвестных.

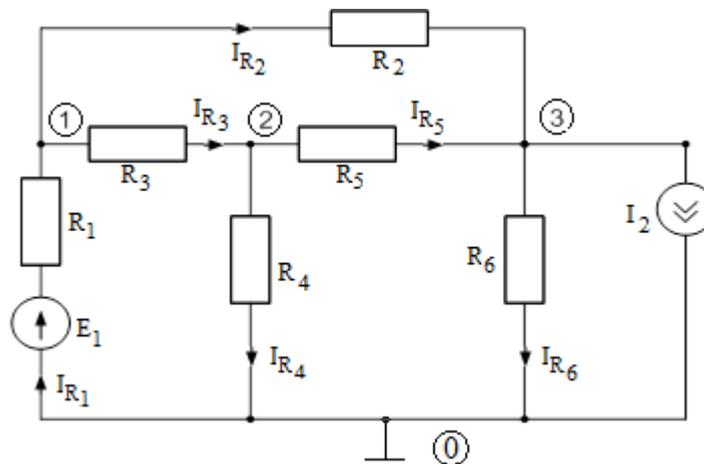
Примечание: напряжения и токи могут быть постоянными, комплексными амплитудами и функциями времени

**Пример.**

Для заданной схемы составить систему уравнений, используя метод узловых напряжений.



**Решение**



1) В качестве базового выберем узел, в котором сходятся  $R_1; R_4; R_6$  и  $I_2$  и заземлим его. Обозначим напряжения узлов 1-3 как  $U_1, U_2, U_3$  соответственно.

2) Используя закон Ома, запишем уравнения для токов в ветвях, соединяющих узлы:

Ветвь 0-1:  $I_{R1} = \frac{E_1 - U_1}{R_1}$ ; ветвь 1-2:  $I_{R3} = \frac{U_1 - U_2}{R_3}$ ; ветвь 1-3:  $I_{R2} = \frac{U_1 - U_3}{R_2}$ ;

ветвь 2-3:  $I_{R5} = \frac{U_2 - U_3}{R_5}$ ; ветвь 2-0:  $I_{R4} = \frac{U_2 - 0}{R_4}$ ; ветвь 3-0:  $I_{R6} = \frac{U_3 - 0}{R_6}$ ;

ветвь, содержащая источник тока:  $I_2$ .

3) Составим систему уравнений, используя первый закон Кирхгофа:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R1} = I_{R3} + I_{R2} \quad \text{для } 1-го \text{ узла} \\ I_{R3} = I_{R4} + I_{R5} \quad \text{для } 2-го \text{ узла} \\ I_{R2} + I_{R5} = I_{R6} + I_2 \quad \text{для } 3-го \text{ узла} \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_1 - U_1}{R_1} = \frac{U_1 - U_2}{R_3} + \frac{U_1 - U_3}{R_2}, \\ \frac{U_1 - U_2}{R_3} = \frac{U_2}{R_4} + \frac{U_2 - U_3}{R_5}, \\ \frac{U_1 - U_3}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = \frac{U_3}{R_6} + I_2. \end{array} \right.$$

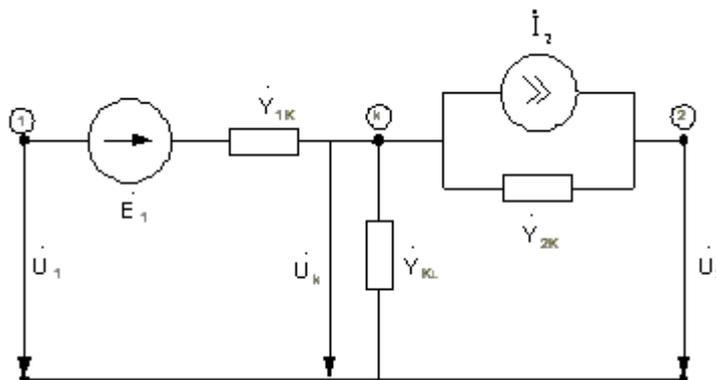
4) Решив её относительно  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ , мы найдём их, а затем токи и напряжения на всех элементах схемы.

Например, напряжение на резисторе  $R_2$   $U_{R_2} = U_1 - U_3$ , а ток, протекающий

через резистор,  $I_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2}$ .

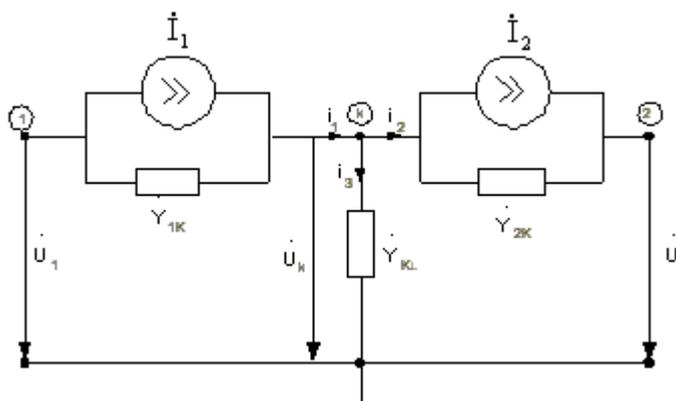
## 2. Упрощение метода для постоянных и гармонических источников

Рассмотрим фрагмент схемы, содержащей источники тока, ЭДС и комплексные проводимости  $Y$ .



Заменяем источник ЭДС на эквивалентный источник тока.

$$I_1 = E_1 \cdot Y_{1K}$$



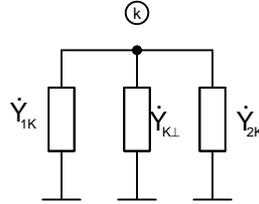
Используя закон Кирхгофа для узла, составим систему уравнений

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 = I_1 + (U_1 - U_K) Y_{1K} \\ i_3 = U_K \cdot Y_{K\perp} \\ i_2 = I_2 + (U_K - U_2) Y_{2K} \end{cases}$$

Подставив второе, третье и четвертое уравнения системы в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned}
& -\dot{I}_1 - (\dot{U}_1 - \dot{U}_K) \dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K \dot{Y}_{K1} + \dot{I}_2 + (\dot{U}_K - \dot{U}_2) \dot{Y}_{2K} = 0 \\
& -\dot{U}_1 \dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K \dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K \dot{Y}_{K1} + \dot{U}_K \dot{Y}_{2K} - \dot{U}_2 \dot{Y}_{2K} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \\
& -\dot{U}_1 \dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K (\dot{Y}_{1K} + \dot{Y}_{K1} + \dot{Y}_{2K}) - \dot{U}_2 \dot{Y}_{2K} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \\
& -\dot{U}_1 \dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K \dot{Y}_{KK} - \dot{U}_2 \dot{Y}_{2K} = \dot{I}^{(K)}
\end{aligned}$$

Где  $\dot{Y}_{KK} = \dot{Y}_{1K} + \dot{Y}_{K1} + \dot{Y}_{2K}$



$\dot{Y}_{KK}$  - узловая проводимость  $K$ -го узла,  $\dot{I}^{(K)} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$  - ток  $K$ -го узла. Узловые проводимости  $\dot{Y}_{KK}$  определяются следующим образом: заземляются противоположные концы ветвей, подходящих к данному узлу (см. рис.) и определяется суммарная проводимость полученной цепи. При этом источники токов разрываются.

- ✓ Уравнение  $-\dot{U}_1 \dot{Y}_{1K} + \dot{U}_K \dot{Y}_{KK} - \dot{U}_2 \dot{Y}_{2K} = \dot{I}^{(K)}$  представляет собой типичное уравнение для  $k$ -го узла в методе узловых напряжений. Под узлом здесь понимают узел, в котором сходится не менее трех ветвей.

Заметим, что в левую часть уравнения со знаком “+” входит слагаемое для потенциала

$K$ -го узла, а со знаком “-“ все остальные слагаемые. Если в схеме всего  $n$  - узлов, то получим систему из  $n$  - уравнений, с  $n$  - неизвестными, которыми будут узловые напряжения  $\dot{U}_K$ . Приведем пример системы из 4 - х уравнений:

$$\begin{cases}
\dot{U}_1 \dot{Y}_{11} - \dot{U}_2 \dot{Y}_{12} - \dot{U}_3 \dot{Y}_{13} - \dot{U}_4 \dot{Y}_{14} = \dot{I}^{(1)} \\
-\dot{U}_1 \dot{Y}_{21} + \dot{U}_2 \dot{Y}_{22} - \dot{U}_3 \dot{Y}_{23} - \dot{U}_4 \dot{Y}_{24} = \dot{I}^{(2)} \\
\vdots \\
-\dot{U}_1 \dot{Y}_{41} - \dot{U}_2 \dot{Y}_{42} - \dot{U}_3 \dot{Y}_{43} + \dot{U}_4 \dot{Y}_{44} = \dot{I}^{(4)}
\end{cases} \quad (6.1)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & -Y_{14} \\ -Y_{21} & \dots & -Y_{24} \\ \vdots & & \\ -Y_{41} & \dots & Y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{I}^{(1)} \\ \dot{I}^{(2)} \\ \vdots \\ \dot{I}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

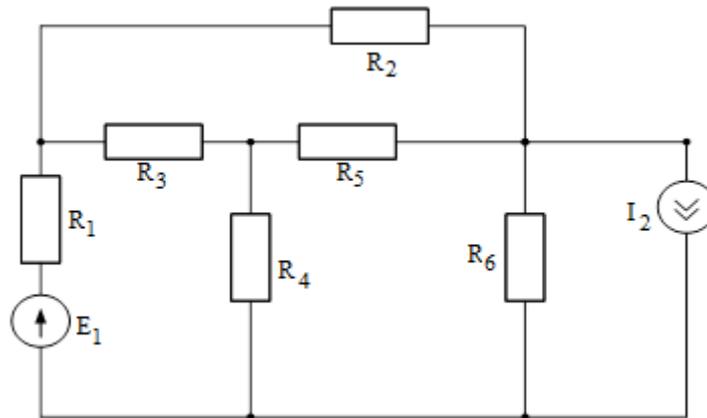
- ✓ Метод узловых потенциалов (напряжений) позволяет определить по заданной схеме напряжение (разность потенциалов) узлов схемы относительно базового узла, который обычно заземлен (т.е. его потенциал равен нулю).

Для определения узловых потенциалов следует:

- 1) Выбрать базовый узел и заземлить его.
  - а) Если требуется найти токи и напряжения на всех элементах схемы, то за базовый узел удобно выбрать узел, в котором сходится наибольшее число ветвей.
  - б) Если требуется найти напряжение на одном двухполюснике, то за базовый узел удобно выбрать один из полюсов этого двухполюсника.
- 2) Заменить источники напряжения в заданной схеме на эквивалентные источники тока и, записав токи, подтекающие к узлу со знаком “+” и оттекающие со знаком “-”, найти узловые токи:  $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots$
- 3) Найти межузловые проводимости ветвей, соединяющих незаземленные узлы.  $\dot{Y}_{mp} = \dot{Y}_{pm}, p \neq m$ , если узлы  $m$  и  $p$  не имеют ветвей между собой, то  $\dot{Y}_{mp} = 0$
- 4) Найти узловые проводимости  $\dot{Y}_{kk}$ , заземлив противоположные концы ветвей, подходящих к данному узлу. При этом источники токов разрываются.
- 5) Записать систему уравнений в форме (6.1) или (6.2).

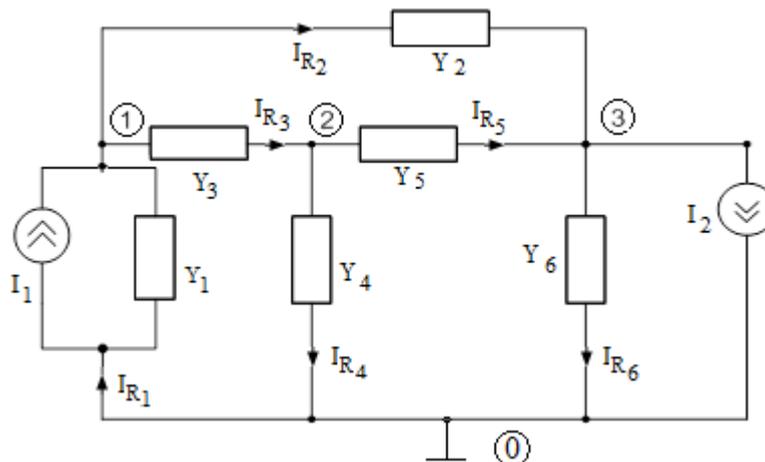
**Пример.**

Для заданной схемы составить систему уравнений, используя упрощение метода узловых напряжений.



**Решение**

- 1) В качестве базового выберем узел, в котором сходятся  $R_1; R_4; R_6$  и  $I_2$  и заземлим его.
- 2) Заменяем источник ЭДС на эквивалентный источник тока и сопротивления на проводимости и найдём узловые токи



$$I_1 = E_1 Y_1$$

$$Y_k = \frac{1}{R_k}$$

$$I^{(1)} = I_1$$

$$I^{(2)} = 0$$

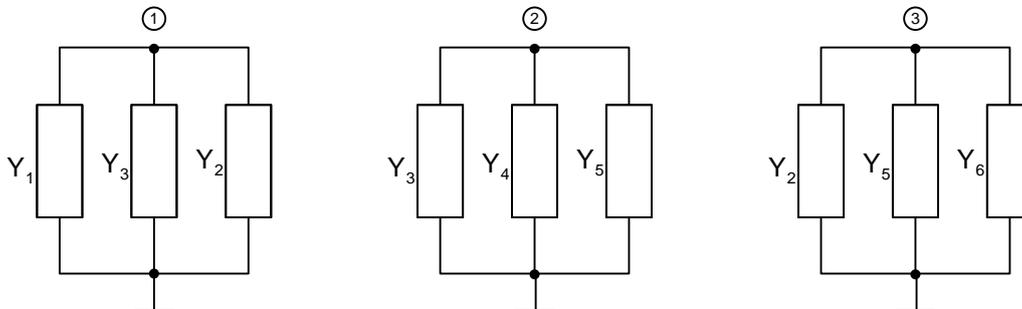
$$I^{(3)} = -I_2$$

3) Найдем межузловые проводимости  $Y_{mp}$

$$Y_{12} = Y_3 = \frac{1}{R_3}; Y_{21} = Y_{12}; Y_{13} = Y_2 = \frac{1}{R_2}; Y_{31} = Y_{13}$$

$$Y_{23} = Y_5 = \frac{1}{R_5}; Y_{32} = Y_{23}$$

4) Найдем узловые проводимости  $Y_{KK}$



$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$Y_{22} = Y_3 + Y_4 + Y_5 = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

$$Y_{33} = Y_2 + Y_5 + Y_6 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

5) Составим систему из трех уравнений:

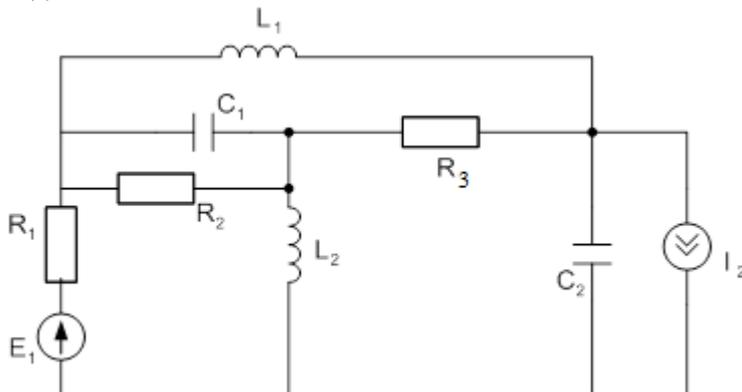
$$\begin{cases} U_1 Y_{11} - U_2 Y_{12} - U_3 Y_{13} = I_1 \\ -U_1 Y_{21} + U_2 Y_{22} - U_3 Y_{23} = 0 \\ -U_1 Y_{31} - U_2 Y_{32} + U_3 Y_{33} = -I_2 \end{cases}$$

Решая эту систему относительно  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ , мы найдём их, а затем токи и напряжения на всех элементах схемы.

Если бы  $R_1 = 0$ , то есть вместо него была перемычка, то узел (1) из системы уравнений выпал бы, т.к.  $U_1 = E_1$ . Тогда система состояла бы из двух уравнений.

### Пример на самостоятельную проработку:

Используя метод узловых потенциалов, составьте систему уравнений для заданной схемы.

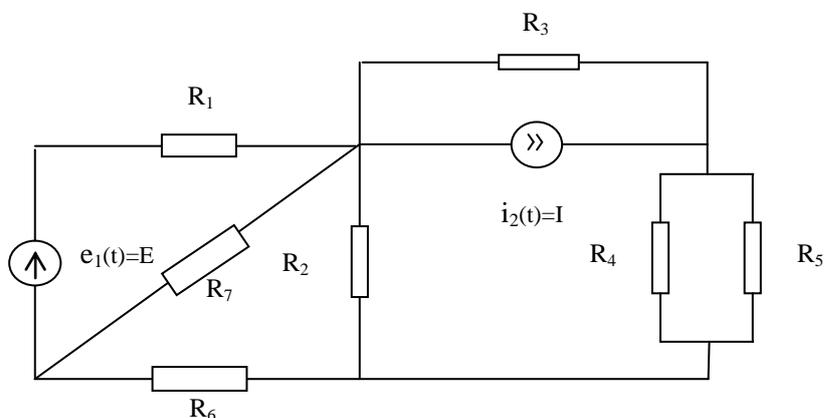


### Контрольные вопросы к лекции №6

1. Перечислите основные методы анализа линейных цепей.
2. Сформулируйте суть метода узловых потенциалов.
3. Из каких соображений выбирается базовый узел в методе узловых потенциалов?
4. В каком случае межузловая проводимость равна нулю?
5. Как определяется узловая проводимость?
6. Как определяется узловый ток?
7. Запишите типичное уравнения для к-го узла в методе узловых потенциалов.
8. От чего зависит количество уравнений, входящих в систему, из которой определяются узловые потенциалы?
9. Какой узел вы выбрали бы в качестве базового, в схеме примера, заданного для самостоятельной проработки, если бы нужно было найти напряжение на катушке  $L_1$ ?

### Типовые задачи к лекции №6

1. Используя метод узловых напряжений, определите напряжение, на элементе  $R_2$  в схеме, изображенной на рисунке, если  $e_1(t)=E$ ,  $E=3\text{В}$ ;  $i_2(t)=I$ ,  $I=2\text{мА}$ ;



$$R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=R_7=1\text{кОм.}$$

2. Используя метод узловых напряжений, определите напряжение, на элементе  $Z_2$  в схеме, изображенной на рисунке, если  $e_1(t)=E\cos(\omega_0t)$ ,  $E=1\text{В}$ ,  $i_2(t)=I\cos\omega_0t$ ,  $I=2\text{мА}$ ;  $\omega_0=2\pi\cdot 10^4$ ,  $Z_1=Z_3=R=1\text{кОм}$ ,  $Z_2=1/(j\omega_0C)$ ,  $C=10^{-7}/(2\pi)\text{Ф}$ ,  $Z_4=Z_5=2R=2\text{кОм}$ .

